

Correction de PROBABILITÉS - Fiche 1

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒

- ① a. $P(Y=7) = \binom{12}{7} 0,68^7 \times (1-0,68)^5 \rightarrow \text{Je montre la formule.}$
 $\approx 0,17866$, arrondi à $10^{-5} \rightarrow \text{Je trouve l'arrondi directement à la calculatrice.}$
- b. $P(Y=12) = \binom{12}{12} 0,68^{12} \times (1-0,68)^0$
 $= 0,68^{12}$ $\rightarrow \text{La forme exacte est très simple car } \binom{12}{12} \text{ et } (1-0,68)^0 \text{ valent tous les deux } 1.$
 $\approx 0,00976$, arrondi à 10^{-5}
 L'autre forme exacte très simple est : $P(Y=0) = \binom{12}{0} 0,68^0 \times (1-0,68)^{12} = 0,32^{12}.$
- c. $P(Y \geq 11) = P(Y=11) + P(Y=12)$ $\rightarrow \text{Je décompose en somme de probabilités simples.}$
 $= \binom{12}{11} 0,68^{11} \times (1-0,68)^1 + 0,68^{12}$ $\rightarrow \text{Je peux montrer de nouveau la formule.}$
 $\approx 0,06497$, arrondi à 10^{-5}
- d. Moins de 3 succès correspond à l'événement $Y < 3$.
 $P(Y < 3) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$
 $= (1-0,68)^{12} + \binom{12}{1} 0,68^1 \times (1-0,68)^{11} + \binom{12}{2} 0,68^2 \times (1-0,68)^{10} \rightarrow \text{Oui, c'est un peu lourd...}$
 $\approx 0,00037$, arrondi à 10^{-5}
- e. Au plus 9 succès correspond à l'événement $Y \leq 9$.
 $P(Y \leq 9) = 1 - P(Y \geq 10)$
 $= 1 - P(Y=10) - P(Y=11) - P(Y=12)$
 $= 1 - \binom{12}{10} 0,68^{10} \times (1-0,68)^2 - P(Y=11) - P(Y=12) \rightarrow \text{On a déjà donné les formules de } P(X=11) \text{ et } P(X=12).$
 $\approx 0,79216$, arrondi à 10^{-5}
- f. Au moins 2 succès correspond à l'événement $Y \geq 2$.
 $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2)$
 $= 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$
 $\approx 0,99997$, arrondi à 10^{-5}
- g. L'espérance de Y est $E(Y) = np = 12 \times 0,68 = 8,16$.

- ② X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.

$$P(X=0) = \binom{4}{0} \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 1 \times 1 \times \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4^3} = \frac{3}{64}$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6 \times \frac{3^2}{4^2} \times \frac{1}{4^2} = \frac{27}{128}$$

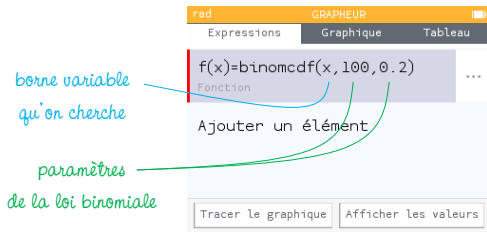
$$P(X=3) = \binom{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 4 \times \frac{3^3}{4^3} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

$$P(X=4) = \binom{4}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \times \frac{3^4}{4^4} \times 1 = \frac{81}{256}$$

La loi de probabilité est donc :

Issues	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
Probabilités	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

- ③ On pourrait tâtonner en calculant des $P(X \leq \dots)$ et finir par trouver assez vite.
Mais on peut définir la fonction $x \mapsto P(X \leq x)$ et afficher le tableau de valeurs.



x	f(x)
19	0.4601613691
20	0.5594615858
21	0.6540332186
22	0.7389327516
23	0.810927921
24	0.8686467833
25	0.9125246155
26	0.9441672833

Si on oublie l'expression binomcdf, on la trouve en tapant la touche boîte à outils



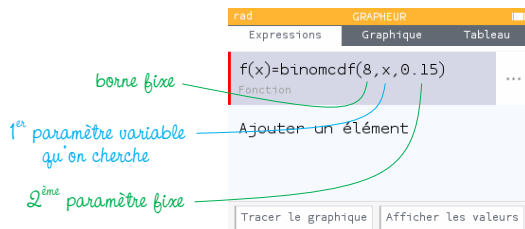
Il suffit de le parcourir jusqu'à dépasser 0,8.

Il convient néanmoins de bien rédiger :

$$\begin{cases} P(X \leq 22) = 0,738... \\ P(X \leq 23) = 0,810... \end{cases}$$

donc la valeur de a est 23.

- ④ a. On va de nouveau utiliser l'expression binomcdf.
Mais attention, on ne cherche plus la borne, on la connaît, elle vaut 50.
C'est le 1^{er} paramètre n qu'on cherche, c'est lui qui servira de variable dans la fonction.



x	f(x)
30	0.9722217928
31	0.9659207757
32	0.9587020018
33	0.9505207246
34	0.9413413919
35	0.9311380836
36	0.9198956157
37	0.9076092042

Il suffit de le parcourir jusqu'à passer en-dessous de 0,95.

$$\begin{cases} \text{Pour } n = 33, P(T \leq 8) = 0,950... \\ \text{Pour } n = 34, P(T \leq 8) = 0,941... \end{cases}$$

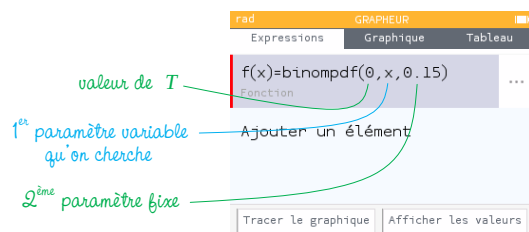
donc la plus petite valeur de n est 34.

- b. $P(T = 0)$ vaut $(1 - 0,15)^n$ donc la comparaison donnée se traduit par l'inéquation $0,85^n < 0,1$.

Méthode 1 : avec la fonction ln

$$\begin{aligned} P(T = 0) &< 0,1 \\ \Leftrightarrow 0,85^n &< 0,1 \\ \Leftrightarrow \ln(0,85^n) &< \ln 0,1 \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[\\ \Leftrightarrow n \ln(0,85) &< \ln(0,1) \\ \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,85)} &\text{ car } \ln(0,85) \text{ négatif} \quad \rightarrow \text{Soyez vigilant au changement d'ordre si votre diviseur est négatif!} \\ \Leftrightarrow n &> 14,1... \\ \Leftrightarrow n &\geq 15 \text{ car } n \text{ entier} \\ \text{donc la plus petite valeur de } n &\text{ est } 15. \end{aligned}$$

Méthode 2 : à la calculatrice



x	f(x)
11	0.1673432437
12	0.1422417571
13	0.1209054936
14	0.1027696695
15	0.0873642191
16	0.07425108624
17	0.0631134233
18	0.05364640981

$$\begin{cases} \text{Pour } n = 14, P(T = 0) = 0,102... \\ \text{Pour } n = 15, P(T = 0) = 0,087... \end{cases}$$

donc la plus petite valeur de n est 15.

- c. $P(T \geq 1)$ vaut $1 - P(T = 0)$ donc $1 - (1 - 0,15)^n$
donc la comparaison donnée se traduit par l'inéquation $1 - 0,85^n > 0,999$.

Méthode 1 : avec la fonction ln

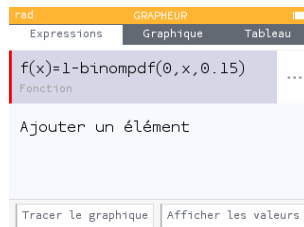
$$\begin{aligned} P(T \geq 1) &> 0,999 \\ \Leftrightarrow 1 - P(T = 0) &> 0,999 \\ \Leftrightarrow 1 - 0,85^n &> 0,999 \\ \Leftrightarrow -0,85^n &> 0,999 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -0,85^n > -0,001 \\
&\Leftrightarrow 0,85^n < 0,001 \\
&\Leftrightarrow \ln(0,85^n) < \ln 0,001 \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[\\
&\Leftrightarrow n \ln(0,85) < \ln(0,001) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,85)} \text{ car } \ln(0,85) \text{ négatif} \\
&\Leftrightarrow n > 42,5... \\
&\Leftrightarrow n \geq 43 \text{ car } n \text{ entier} \\
&\text{donc la plus petite valeur de } n \text{ est } 43.
\end{aligned}$$

Méthode 2 : à la calculatrice

Nous avons vu dans la boîte à outils de la calculatrice les fonctions `binomcdf` pour $x \mapsto P(X \leq m)$ et `binompdf` pour $x \mapsto P(X = m)$.
Malheureusement, il n'y a pas de fonction pour $x \mapsto P(X \geq m)$!

On va devoir adapter la fonction :



Résultats exacts		Régler l'intervalle
x	f(x)	
39	0.9982325868	
40	0.9984976988	
41	0.9987230439	
42	0.9989145873	
43	0.9990773992	
44	0.9992157894	
45	0.999333421	
46	0.9994334078	

$$\begin{cases} \text{Pour } n = 42, P(T \geq 1) = 0,9989... \\ \text{Pour } n = 43, P(T \geq 1) = 0,99907... \end{cases}$$

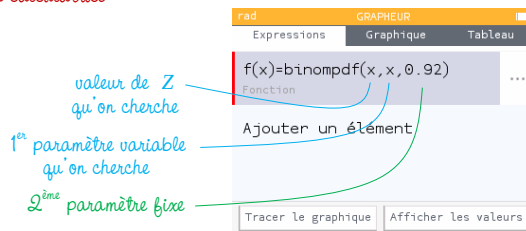
donc la plus petite valeur de n est 43.

- ⑤ $P(T = n)$ vaut $0,92^n$ donc la comparaison donnée se traduit par l'inéquation $0,92^n < 0,2$.

Méthode 1 : avec la fonction $\ln$

$$\begin{aligned}
&P(T = n) < 0,2 \\
&\Leftrightarrow 0,92^n < 0,2 \\
&\Leftrightarrow \ln(0,92^n) < \ln 0,2 \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[\\
&\Leftrightarrow n \ln(0,92) < \ln(0,2) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,92)} \text{ car } \ln(0,92) \text{ négatif} \\
&\Leftrightarrow n > 19,3... \\
&\Leftrightarrow n \geq 20 \text{ car } n \text{ entier} \\
&\text{donc la plus petite valeur de } n \text{ est } 20.
\end{aligned}$$

Méthode 2 : à la calculatrice



Résultats exacts		Régler l'intervalle
x	f(x)	
16	0.2639936117	
17	0.2429221228	
18	0.222936353	
19	0.2051814447	
20	0.1866933292	
21	0.1735978628	
22	0.1597108338	
23	0.1469332311	

$$\begin{cases} \text{Pour } n = 19, P(T = n) = 0,205... \\ \text{Pour } n = 20, P(T = n) = 0,188... \end{cases}$$

donc la plus petite valeur de n est 20.

- ⑥ C'est un exercice qu'on pourrait demander en Seconde si on ne piochait pas autant. On ferait un arbre pondéré.
L'arbre est ici déraisonnable puisqu'il se terminerait avec $2^{10} = 1\,024$ branches !
Vous devez donc repérer dans cet énoncé une répétition d'épreuve avec indépendance, et donc une loi binomiale.
On ne vous donne aucune indication, vous devez donc non seulement rédiger mais aussi présenter la variable aléatoire utile.

Les mots-clés sont en noir :

Une carte piochée est **soit un cœur, avec une probabilité $p = 0,25$, soit pas un cœur.**
Donc, c'est une **épreuve de Bernoulli.**
On pioche 4 fois avec remise,
donc l'épreuve de Bernoulli est **répétée 10 fois de manière indépendante**
donc, c'est un **schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$.**
Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de cœurs.
Elle suit donc la **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$.**

→ Deux issues, dont « cœur » est le succès.
→ « épreuve de Bernoulli ».
→ Cause de l'indépendance des répétitions
→ Répétitions + Indépendance
→ « schéma de Bernoulli ».
→ Je pose la variable aléatoire qui compte les succès.
→ « loi binomiale » avec les paramètres.

On en déduit à la calculatrice que la probabilité de gagner est $P(X \geq 3) \approx 0,474$ arrondie à 10^{-3} . $\rightarrow$ « au moins trois cœurs » se traduit par $X \geq 3$.

L'énoncé demande un arrondi.

Ça tombe bien car l'écriture exacte aurait un peu longue à écrire :

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0,25^0 \times (1-0,25)^{10-0} - \binom{10}{1} 0,25^1 \times (1-0,25)^{10-1} - \binom{10}{2} 0,25^2 \times (1-0,25)^{10-2} \end{aligned}$$

- ⑦ La pièce de monnaie fait **soit pile**, avec une probabilité $p = 0,5$, **soit face**.

Donc, c'est une **épreuve de Bernoulli**.

On lance 100 fois et chaque lancer est indépendant des autres,

$\rightarrow$ La cause de l'indépendance est implicite mais évidente...

donc l'épreuve de Bernoulli est **répétée 100 fois de manière indépendante**

donc, c'est un **schéma de Bernoulli de paramètres** $n = 100$ et $p = 0,5$.

Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de piles.

Elle suit donc la **loi binomiale de paramètres** $n = 100$ et $p = 0,5$.

On en déduit à la calculatrice que la probabilité d'obtenir entre 50 et 60 fois pile est $P(50 \leq X \leq 60) \approx 0,522$ arrondie à 10^{-3} .

- ⑧ Le jeton pioché est **soit rouge**, avec une probabilité $p = \frac{10}{10+30+40} = 0,125$, **soit blanc**.

Donc, c'est une **épreuve de Bernoulli**.

On pioche 5 fois avec remise,

donc l'épreuve de Bernoulli est **répétée 5 fois de manière indépendante**

donc, c'est un **schéma de Bernoulli de paramètres** $n = 5$ et $p = 0,125$.

Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de jetons rouges.

Elle suit donc la **loi binomiale de paramètres** $n = 5$ et $p = 0,125$.

On en déduit à la calculatrice que la probabilité de piocher au moins un jeton rouge est $P(X \geq 1) \approx 0,487$ arrondie à 10^{-3} .

- ⑨ a. Le feu est **soit vert**, avec une probabilité $p = \frac{1,5}{1,5+2,5} = 0,375$, **soit orange ou rouge**.

Donc, c'est une **épreuve de Bernoulli**.

Sur une durée de 4 semaines, on passe le feu $5 \times 4 = 20$ fois de manière indépendante,

donc l'épreuve de Bernoulli est **répétée 20 fois de manière indépendante**

donc, c'est un **schéma de Bernoulli de paramètres** $n = 20$ et $p = 0,375$.

Soit la variable aléatoire X qui compte le nombre de feux verts.

Elle suit donc la **loi binomiale de paramètres** $n = 20$ et $p = 0,375$.

On en déduit à la calculatrice que la probabilité de passer au vert au moins 10 fois est $P(X \geq 10) \approx 0,177$ arrondie à 10^{-3} .

- b. L'espérance de X est $np = 20 \times 0,375 = 7,5$.

Donc, sur une durée de 4 semaines, je passe au vert en moyenne 7,5 fois.

- ⑩ a. On choisit le succès « non commercialisable » car c'est ça que compte la variable aléatoire donnée.

Une gélule prélevée est **soit non commercialisable**, avec une probabilité $p = 0,03$, **soit commercialisable**.

Donc, c'est une **épreuve de Bernoulli**.

La proportion est suffisamment importante pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 200 gélules avec remise

donc l'épreuve de Bernoulli est **répétée 200 fois de manière indépendante**

donc, c'est un **schéma de Bernoulli de paramètres** $n = 200$ et $p = 0,03$.

La variable aléatoire X suit donc la **loi binomiale de paramètres** $n = 200$ et $p = 0,03$.

- b.
$$\begin{cases} P(X \leq 8) = 0,850... \\ P(X \leq 9) = 0,919... \end{cases}$$

donc la valeur de b est 9.

- c. Il n'est pas facile d'interpréter que 9 est la plus petite valeur de b telle que $P(X \leq b) > 0,9$.

Il y a plus de 90% de chance que l'échantillon de 200 gélules contienne au moins 9 gélules non commercialisables.

rad GRAPHEUR		
Expressions	Graphique	Tableau
Résultats exacts	Régler l'intervalle	
x	f(x)	
5	0.4432292126	
6	0.6063152008	
7	0.7461031911	
8	0.8594037667	
9	0.9192206409	
10	0.9598722584	
11	0.9815866801	

- ⑪ a. **Attention au choix du succès** : on donne le pourcentage de boîtes avec traces de pesticides, mais la variable aléatoire donnée compte les boîtes sans trace de pesticides, donc le succès sera de prélever une boîte sans trace de pesticides.

Une boîte est sans traces de pesticides, avec une probabilité $p = 1 - 0,12 = 0,88$, ou est avec traces de pesticides.

Donc, prélever une boîte dans le stock est une épreuve de Bernoulli.

Le tirage aléatoire de 10 boîtes est assimilé à un tirage avec remise,

$\rightarrow$ Cause de l'indépendance.

donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 10 fois de manière indépendante

donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$

donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

- b. On déduit du a. :

$$\begin{aligned} P(X = 10) &= \binom{10}{10} 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10} \\ &= 0,88^{10} \\ &\approx 0,28, \text{ arrondi au centième} \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides est d'environ 0,28.

c.
$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{8} 0,88^8 \times (1 - 0,88)^2 + \binom{10}{9} 0,88^9 \times (1 - 0,88)^1 + P(X = 10) \\ &\approx 0,89, \text{ arrondi au centième.} \end{aligned}$$

Donc, la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides est d'environ 0,89.

- d. L'espérance de X est $E(X) = np = 10 \times 0,88 = 8,8$.
Dans un lot de 10 boîtes de thé vert, en moyenne, 8,8 boîtes sont sans traces de pesticides.

- ⑫ a. Cette première question ne concerne qu'un seul candidat.

On n'a donc pas encore répété l'expérience plusieurs fois, la loi binomiale n'est pas encore entrée en scène...

Parmi tous les dossiers, la proportion de dossiers validés est 40 %.

Parmi ces 40 %, 70 % sont retenus, donc la proportion de dossiers retenus est 70 % de 40 %.

Parmi ces 70 % de 40 %, 25 % sont recrutés, donc la proportion de dossiers recrutés est 25 % de 70 % de 40 %.

Donc, la probabilité que le candidat soit recruté est $0,25 \times 0,7 \times 0,4 = 0,07$.

- b. Attention ! Ici, pas de question qui demande clairement de justifier la loi binomiale.

Mais il faut quand même la présenter.

Ce qui sert de succès est donné par ce que compte la variable X : elle compte le nombre de recrutés, donc le succès sera d'être recruté.

Chaque candidat sera recruté, avec une probabilité $p = 0,07$, ou ne sera pas recruté.

Donc, le recrutement d'un candidat est une épreuve de Bernoulli.

Les études des 5 dossiers sont faites indépendamment les unes des autres,

→ L'énoncé annonce clairement l'indépendance, je recopie cette partie.

donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 5 fois de manière indépendante,

donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$

donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(X = 2) &= \binom{5}{2} 0,07^2 \times (1 - 0,07)^{5-2} \\ &\approx 0,039, \text{ arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés est d'environ 0,039.

- ⑬ a. Ce qui servira de succès est donné par ce que compte la variable X : elle compte les conifères, donc le succès sera de choisir un conifère.

Un arbre dans le stock est un conifère, avec une probabilité $p = 1 - 0,475 = 0,525$, ou est un arbre à feuilles.

Donc, choisir un arbre dans le stock est une épreuve de Bernoulli.

Le choix de l'échantillon de 10 arbres est assimilé à un tirage avec remise,

donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 10 fois de manière indépendante,

donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,52$

donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$.

$$\begin{aligned} \text{donc } P(X = 5) &= \binom{10}{5} 0,525^5 \times (1 - 0,525)^{10-5} \\ &\approx 0,243, \text{ arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères est d'environ 0,243.

- b. Les succès sont les conifères.

Mais cette question donne « au moins 2 feuillus », il faut le transformer en une information sur les conifères :

Comporter au moins deux arbres feuillus est équivalent à comporter au plus 8 conifères.

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= 1 - P(X > 8) \\ &= 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \\ &= 1 - \binom{10}{9} 0,525^9 \times 0,475^1 - \binom{10}{10} 0,525^{10} \times 0,475^0 \\ &\approx 0,984, \text{ arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

Donc, la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus est d'environ 0,984.

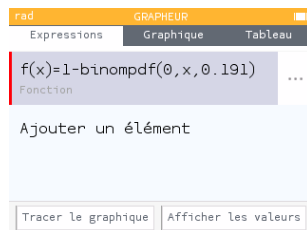
- ⑭ a. Après avoir rédigé que X suit une loi binomiale, vous devez trouver : $P(X = 3) \approx 0,236$ arrondi au millième
- b. Vous devez trouver : $P(X \geq 1) \approx 0,991$ arrondi au millième
- c. $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6)$
 $\approx 1 - 0,8725 = 0,1275 > 0,1$
 $P(X \geq 7) = 1 - P(X < 7)$
 $\approx 1 - 0,9616 = 0,0384 < 0,1$
 C'est donc à partir de $N = 7$ que la probabilité de cet événement est inférieure à 0,1.

- ⑮ 1. a. Justification habituelle avec les paramètres $n = 15$ et $p = 0,191$.
- b. Vous devez trouver : $P(X \leq 1) \approx 0,1890$ arrondi au millième
2. Il faut traduire « la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon est supérieure ou égale à 0,99 ».
- $P(X \geq 1) \geq 0,99$

Méthode 1 : avec la fonction $\ln$

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 1) &\geq 0,99 \\
 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) &\geq 0,99 \\
 \Leftrightarrow 1 - (1 - 0,191)^n &\geq 0,99 \\
 \Leftrightarrow -0,809^n &\geq 0,99 - 1 \\
 \Leftrightarrow -0,809^n &\geq -0,01 \\
 \Leftrightarrow 0,809^n &\leq 0,01 \\
 \Leftrightarrow \ln(0,809^n) &\leq \ln(0,01) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[\\
 \Leftrightarrow n \ln(0,809) &\leq \ln(0,01) \\
 \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,809)} \text{ car } \ln(0,809) \text{ négatif} \\
 \Leftrightarrow n &\geq 21,7... \\
 \Leftrightarrow n &\geq 22 \text{ car } n \text{ entier} \\
 \text{donc la valeur minimale de } n &\text{ est } 22.
 \end{aligned}$$

Méthode 2 : à la calculatrice



Résultats exacts		Régler l'intervalle
x	f(x)	
17	0.9727651575	
18	0.9779670125	
19	0.9821753131	
20	0.9855798283	
21	0.9883340811	
22	0.9905622716	
23	0.9923648777	
24	0.9938291861	

$$\begin{cases} \text{Pour } n = 21, P(X \geq 1) = 0,988... \\ \text{Pour } n = 22, P(X \geq 1) = 0,9905... \end{cases}$$

donc la valeur minimale de n est 22.

- ⑯ a. Le paramètre p est la probabilité de tirer une boule rouge.
 Donc $p = \frac{4}{n+4}$.
- b. $q_n = P(X \leq 3)$
 $= 1 - P(X = 4)$
 $= 1 - \binom{4}{4} \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \times \left(1 - \frac{4}{n+4}\right)^{4-4}$
 $= 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$
- c. $q_n \geq 0,9999$
 $\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \geq 0,9999$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \leq 0,0001$
 $\Leftrightarrow \sqrt[4]{\left(\frac{4}{n+4}\right)^4} \leq \sqrt[4]{0,0001} \text{ car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{4}{n+4}\right)^2 \leq 0,01$
 $\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{4}{n+4}\right)^2} \leq \sqrt{0,01} \text{ car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+$
 $\Leftrightarrow \frac{4}{n+4} \leq 0,1$

$$\Leftrightarrow \frac{n+4}{4} \geq \frac{1}{0,1} \text{ car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}$$

$$\Leftrightarrow n+4 \geq 4 \times 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq 36$$

Le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à 0,999 9 est donc 36.

- ⑰ a. Un membre adhère à la section tennis, avec une probabilité $p = 0,30$, ou non.
Donc, choisir au hasard un membre est une épreuve de Bernoulli.
L'épreuve de Bernoulli est répétée 4 fois de manière indépendante.
donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,3$
donc, la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois que le membre choisi soit adhérent à la section tennis suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,3$.

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{4}{2} 0,3^2 \times (1 - 0,3)^{4-2} \\ &= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 0,3^2 \times 0,7^2 \\ &\approx 0,265, \text{ arrondi à } 10^{-3}. \end{aligned}$$

- b. X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,3$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} 0,3^0 (1 - 0,3)^{n-0} \\ &= 1 - 0,7^n \end{aligned}$$

- ⑱ 1. a. Justification habituelle avec les paramètres $n = 5$ et $p = 0,694$.

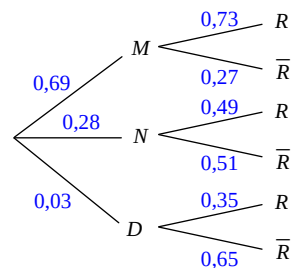
- b. Vous devez trouver : $P(X = 1) \approx 0,03$ arrondi au centième

- c. On trouve à la calculatrice : $P(X \geq 4) = 0,51... > \frac{1}{2}$
Donc, le vétérinaire a raison.

2. On demande combien de coyotes il faut capturer, on cherche donc la valeur de n , la taille de l'échantillon.
On traduit que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 par $P(X \geq 1) > 0,99$.
Comme dans le ④ c. et le ⑮, on trouve avec une des deux méthodes que la valeur minimale de n est 4.
Donc, ils doivent capturer au moins 4 coyotes.

⑲ Partie A

- 1.



2. D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned} P(D \cap R) &= P(D) \times P_D(R) \\ &= 0,03 \times 0,35 = 0,0105 \end{aligned}$$

3. D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned} P(M \cap \bar{R}) &= P(M) \times P_M(\bar{R}) \\ &= 0,69 \times 0,27 = 0,1863. \end{aligned}$$

Cela signifie que la probabilité que le déchet prélevé soit minéral et non recyclable est de 18,63%.

On peut répondre en termes de proportion : Cela signifie que 18,63% des déchets produits sont minéraux et non recyclables.

4. M , N et D forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap M) + P(R \cap N) + P(R \cap D) \\ &= 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,0105 \\ &= 0,6514 \end{aligned}$$

5. On repère bien sûr une probabilité conditionnelle.

D'après le principe multiplicatif :

$$P_R(N) = \frac{P(R \cap N)}{P(R)} = \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} \approx 0,2106 \text{ arrondi au dix-millième.}$$

Partie B

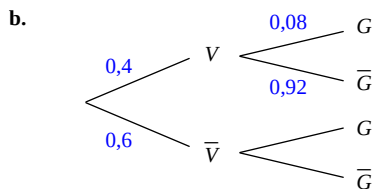
1. a. Un déchet est recyclable, avec une probabilité $p = 0,6514$, ou n'est pas recyclable.
Donc, prélever un déchet est une épreuve de Bernoulli.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de 20 déchets à un tirage avec remise donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 20 fois de manière indépendante, donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6514$.
b.
$$P(X = 14) = \binom{20}{14} 0,6514^{14} \times (1 - 0,6514)^{20-14}$$
$$\approx 0,1723, \text{ arrondi au dix millième}$$

Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables vaut environ 17,23%.
2. a.
$$p_n = P(X = 0) = \binom{n}{0} 0,6514^0 \times (1 - 0,6514)^n$$
$$= 0,3486^n$$

b. On traduit que la probabilité qu'au moins un déchet soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9 par $P(X \geq 1) > 0,9999$.
Comme dans le ④ c. et le ⑤, on trouve avec une des deux méthodes que la valeur minimale de n est 9.

② **Partie A**

1. a. D'après l'énoncé, $P(G) = 20\% = 0,2$.



2. D'après le principe multiplicatif :
 $P(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = 0,032$
Donc, la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée est 3,2%.

3. On repère la probabilité conditionnelle $P_{\bar{V}}(G)$ qu'on va calculer avec $\frac{P(\bar{V} \cap G)}{P(\bar{V})}$.

Mais nous n'avons pas $P(\bar{V} \cap G)$ qu'il faut calculer d'abord, avec la seule donnée non encore utilisée, c'est $P(G) = 0,2$.

V et $\bar{V}$ forment une partition,
donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(V \cap G) + P(\bar{V} \cap G)$$

$$\text{donc } P(\bar{V} \cap G) = P(G) - P(V \cap G)$$

$$= 0,2 - 0,032$$

$$= 0,168$$

D'après le principe multiplicatif :

$$P_{\bar{V}}(G) = \frac{P(\bar{V} \cap G)}{P(\bar{V})}$$

$$= \frac{0,168}{0,6} = 0,28$$

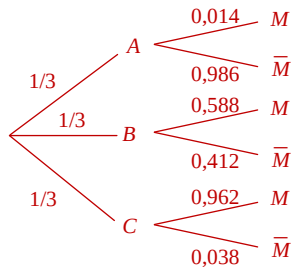
Donc, la probabilité qu'une personne non vaccinée ait contracté la grippe est égale à 28%.

Partie B

1. La personne interrogée est vaccinée, avec une probabilité $p = 0,4$, ou n'est pas vaccinée.
Donc, interroger une personne est une épreuve de Bernoulli.
Le choix se ramène à 40 tirages successifs indépendants et avec remise donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 40 fois de manière indépendante, donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,4$.
2. a.
$$P(X = 15) = \binom{40}{15} 0,4^{15} \times (1 - 0,4)^{40-15}$$
$$\approx 0,123, \text{ arrondi au millième}$$

Donc la probabilité qu'exactly 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées est d'environ 12,3%.
b. D'après la calculatrice, $P(X \geq 20) \approx 0,130$, arrondi au millième
Donc la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée est d'environ 13%.

- ② 1. a. Anselme répond correctement à une question, avec une probabilité $p = 0,25$, ou ne répond pas correctement. Donc, la réponse d'Anselme est une épreuve de Bernoulli. Il répond à 20 questions complètement au hasard donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 20 fois de manière indépendante, donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.
- b. D'après la calculatrice, $P(X \geq 10) \approx 0,014$, arrondi au millième.
- c. Les deux autres variables aléatoires suivent aussi des lois binomiales. Y est de paramètres 20 et 0,5 et Z est de paramètres 20 et $\frac{2}{3}$.
D'après la calculatrice, $P(Y \geq 10) \approx 0,588$, arrondi au millième.
Et $P(Z \geq 10) \approx 0,962$, arrondi au millième.
2. Il n'est pas demandé mais on peut s'aider d'un arbre :



Pour les probabilités conditionnelles, on utilise les résultats arrondis obtenus à la question 1. .

La probabilité demandée est la probabilité conditionnelle $P_M(B)$ qu'on va calculer avec $\frac{P(M \cap B)}{P(M)}$.

D'après le principe multiplicatif :

$$P(M \cap B) \approx \frac{1}{3} \times 0,588 = 0,196$$

Il nous faut $P(M)$:

A , B et C forment une partition,

donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M \cap A) + P(M \cap B) + P(M \cap C) \\ &\approx \frac{1}{3} \times 0,014 + 0,196 + \frac{1}{3} \times 0,962 \\ &\approx 0,521 \end{aligned}$$

D'après le principe multiplicatif :

$$\begin{aligned} P_M(B) &= \frac{P(M \cap B)}{P(M)} \\ &\approx \frac{0,196}{0,521} \approx 0,376 \end{aligned}$$

Donc, la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara est d'environ 0,376.

② Partie A

- Il y a cinq chemins permettant de se rendre en A : NEEEE, ENEEE, EENEE, EEENE, EEEEN.
- Il faudra aller p fois vers l'est et monter q fois vers le nord. La longueur des chemins sera donc égale à $p + q$.
- Les chemins s'écrivent avec $p + q$ lettres et parmi ces lettres, il y a p lettres E. Choisir l'emplacement de ces p lettres E, c'est piocher p fois sans ordre et sans répétition dans l'ensemble $\{1; 2; 3; \dots; p + q\}$. Il y donc autant d'emplacements possibles que de p -combinaisons parmi $p + q$ éléments. Il y en a bien $\binom{p+q}{p}$.
- Pour arriver au point $C(7; 5)$, d'après la question 3., il y a $\binom{7+5}{7} = \binom{12}{7} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 792$ chemins possibles.
- Pour arriver au point $A(4; 1)$, on sait déjà qu'il y a 5 chemins. $\rightarrow$ On vérifie avec $\binom{4+1}{4} = \binom{5}{4} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$.
Une fois arrivé en A, pour arriver en C, il faut aller $7 - 4 = 3$ fois vers l'est et monter $5 - 1 = 4$ fois vers le nord. Il y a donc $\binom{3+4}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$ chemins pour aller de A à C.
On en déduit qu'il y a $5 \times 35 = 175$ chemins pour arriver en C en passant par A.

Partie B

- Les points d'arrivée sont tous les points dont la somme des coordonnées vaut 5. Ce sont les points de coordonnées $(5; 0)$, $(4; 1)$, $(3; 2)$, $(2; 3)$, $(1; 4)$ et $(0; 5)$.

2. À chaque intersection, on peut aller vers le nord, avec une probabilité $p = \frac{2}{3}$, ou aller vers l'est.

Donc, la direction choisie à chaque intersection est une épreuve de Bernoulli.

La longueur du chemin est 5 et le choix à chaque intersection est indépendant du choix précédent, donc l'épreuve de Bernoulli est répétée 5 fois de manière indépendante,

donc, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{2}{3}$.

3. On arrive en A si on n'a été qu'une seule fois vers le nord.

La probabilité est donc $P(X = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-1}$

$\approx 0,0412$, arrondi au dix-millième

Donc, la probabilité que le promeneur arrive en A est environ 4,12%.