

Correction de MATRICES - Fiche 1

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤

- ① 1. $c_{n+1} = 0,1r_n + 0,95c_n$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$
3. ♦ On pose $\mathcal{P}(n)$ l'égalité à montrer « $U_n = A^n \times U_0$ ».
- ♦ Initialisation :
 $A^0 \times U_0 = I_2 \times U_0 = U_0$,
 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ♦ Itération :
 Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n quelconque.
 Alors :
 $U_{n+1} = A \times U_n$
 $= A \times A^n \times U_0$ par hypothèse de récurrence
 $= A^{n+1} \times U_0$
 Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
- ♦ Conclusion :
 Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. a. $A^5 \approx \begin{pmatrix} 0,629 & 0,185 \\ 0,371 & 0,815 \end{pmatrix}$
- b. $U_5 = A^5 \times U_0$
 $\approx \begin{pmatrix} 0,629 & 0,185 \\ 0,371 & 0,815 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 62,16 \\ 57,84 \end{pmatrix}$

On en déduit qu'en 2015, la population rurale est d'environ 62,16 millions d'habitants et que la population citadine est d'environ 57,84 millions d'habitants.

5. a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} & 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times (-\frac{1}{3}) \\ 2 \times \frac{1}{3} - 1 \times \frac{2}{3} & 2 \times \frac{1}{3} - 1 \times (-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 & \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times (-1) \\ \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 2 & \frac{2}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Donc $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de P .
- b. À la calculatrice : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}$
- c. $D = P^{-1} A P \Leftrightarrow P D = P P^{-1} A P$
 $\Leftrightarrow P D = A P$
 $\Leftrightarrow P D P^{-1} = A P P^{-1}$
 $\Leftrightarrow P D P^{-1} = A$
- d. ♦ On pose $\mathcal{Q}(n)$ l'égalité à montrer « $U_n = A^n \times U_0$ ».
- ♦ Initialisation :
 $P D^1 P^{-1} = P D P^{-1} = A$ d'après c.
 donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
- ♦ Itération :
 Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour un certain n quelconque.
 Alors :
 $A^{n+1} = A A^n$
 $= A P D^n P^{-1}$ par hypothèse de récurrence
 $= P D P^{-1} P D^n P^{-1}$ d'après la question c)
 $= P D D^n P^{-1}$
 $= P D^{n+1} P^{-1}$
 Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ vraie.
- ♦ Conclusion :
 Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. a. D diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,85^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85^n \end{pmatrix}$

b. $U_n = A^n \times U_0$
 $= P D^n P^{-1} \times U_0$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \times 0,85^n \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 40 + 50 \times 0,85^n \\ 80 - 50 \times 0,85^n \end{pmatrix}$

De la première ligne, on déduit $r_n = 40 + 50 \times 0,85^n$.

Et de la deuxième ligne, on déduit $c_n = 80 - 50 \times 0,85^n$.

c. $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$
 et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 40$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 80$.

On en conclut que, au bout d'un grand nombre d'années, le nombre des ruraux tendra vers 40 millions et celui des citadins tendra vers 80 millions.

d. À la calculatrice, on obtient $\begin{cases} r_5 = 40 + 50 \times 0,85^5 = 62,18... \\ c_5 = 80 - 50 \times 0,85^5 = 57,81... \end{cases}$ puis $\begin{cases} r_6 = 40 + 50 \times 0,85^6 = 58,85... \\ c_6 = 80 - 50 \times 0,85^6 = 61,14... \end{cases}$
 Donc, la population urbaine dépassera la population rurale à partir de l'année 2016.

- ② 1. a_{n+1} est la somme de 65 % de a_n , proportion des abonnés qui achètent de nouveau une d'abonné, et de 45 % de b_n , proportion de ceux qui passe de la carte bridée à la carte d'abonné
 donc $a_{n+1} = 0,65a_n + 0,45b_n$.
 On en déduit que $b_{n+1} = (1 - 0,65)a_n + (1 - 0,45)b_n = 0,35a_n + 0,55b_n$.

$$MP_n = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65a_n + 0,45b_n \\ 0,35a_n + 0,55b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = P_{n+1}.$$

2. $P_1 = MP_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,47 \end{pmatrix}$
 $P_2 = MP_1 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,53 \\ 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,556 \\ 0,444 \end{pmatrix}$

Donc, $b_2 = 0,444$ et donc 44,4 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche bridée en 2019.

On pouvait aussi utiliser les deux relations de récurrence :

$$a_1 = 0,65a_0 + 0,45b_0$$

$$= 0,65 \times 0,4 + 0,45 \times 0,6 = 0,53$$

$$\text{et donc } b_1 = 1 - 0,53 = 0,47$$

$$b_2 = 0,35a_1 + 0,55b_1$$

$$= 0,35 \times 0,53 + 0,55 \times 0,47 = 0,444 \text{ et même conclusion}$$

On remarque qu'il est inutile de calculer a_2 .

3. a. À la calculatrice, $QT = TQ = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

b. $TQ = 16 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 16 I_2$

$$\text{donc } \frac{1}{16} TQ = I_2$$

$$\text{donc } Q \text{ est inversible et } Q^{-1} = \frac{1}{16} T.$$

4. a. $Q^{-1}M = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -1,8 \end{pmatrix}$

→ Remarquez qu'il vaut mieux laisser $\frac{1}{16}$ en facteur.

$$\text{donc } Q^{-1}MQ = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1,4 & -1,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 3,2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \text{ qui est bien diagonale}$$

- b. Initialisation (attention, n est non nul donc on initialise au rang 1)

$$\begin{aligned} QD^{-1}Q^{-1} &= Q(Q^{-1}MQ)Q^{-1} \text{ d'après a.} \\ &= I_2 M I_2 \\ &= M^1 \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Itération

On suppose la propriété vraie à un certain rang n .

$$\begin{aligned} M^n &= QD^nQ^{-1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ \text{donc } M^n M &= QD^nQ^{-1}M \\ \text{donc } M^{n+1} &= QD^nQ^{-1}QDQ^{-1} \text{ d'après l'initialisation} \\ \text{donc } M^{n+1} &= QD^{n+1}Q^{-1} \end{aligned}$$

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier non nul n .

c. $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,2^n \end{pmatrix}$ car D diagonale

$$QD^n = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0,2^n \\ 7 & -0,2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } M^n &= QD^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 0,2^n \\ 7 & -0,2^n \end{pmatrix} \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. a. Pour tout entier naturel n , $P_n = M^n P_0$.

b. $P_n = M^n P_0$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{16} ((9 + 7 \times 0,2^n) \times 0,4 + (9 - 9 \times 0,2^n) \times 0,6) \\ &= \frac{1}{16} (9 - 2,6 \times 0,2^n) \\ &= 0,5625 - 0,1625 \times 0,2^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } b_n &= \frac{1}{16} ((7 - 7 \times 0,2^n) \times 0,4 + (7 + 9 \times 0,2^n) \times 0,6) \\ &= \frac{1}{16} (7 + 2,6 \times 0,2^n) \\ &= 0,4375 + 0,1625 \times 0,2^n \end{aligned}$$

③ **Partie A**

1. $a_1 = 97\% \text{ de } 200 + 7\% \text{ de } 300 = 0,97 \times 200 + 0,07 \times 300 = 215$
 $b_1 = 500 - 215 = 285$

2. a. D'après l'énoncé, on a $\begin{cases} a_{n+1} = 0,97a_n + 0,07b_n \\ b_{n+1} = 0,03a_n + 0,93b_n \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Or, } AX_n &= \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,97a_n + 0,07b_n \\ 0,03a_n + 0,93b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} \end{aligned}$$

- b. Initialisation

$$\begin{aligned} A^0 X_0 &= I_2 X_0 = X_0 \\ \text{donc la propriété est vraie pour } n &= 0. \end{aligned}$$

Itération

On suppose la propriété vraie à un certain rang n .

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ \text{donc } AX_n &= A A^n X_0 \\ \text{donc } X_{n+1} &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n .

c. $A^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,736 & 0,615 \\ 0,264 & 0,385 \end{pmatrix}$ en arrondissant les coefficients au millièmes.

$$X_{20} = A^{20} X_0 \approx \begin{pmatrix} 0,736 & 0,615 \\ 0,264 & 0,385 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 332 \\ 168 \end{pmatrix}$$

Au bout de 20 jours d'intervention, il y a 332 ordinateurs sains et 168 ordinateurs défectueux.

Partie B

1. $DX_n = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n \\ 0,9b_n \end{pmatrix}$
 donc $DX_n + B = \begin{pmatrix} 0,9a_n \\ 0,9b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 35 \\ 0,9b_n + 15 \end{pmatrix}$

Or :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0,97a_n + 0,07(500 - a_n) \\ &= 0,97a_n + 35 - 0,07a_n \\ &= 0,9a_n + 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 0,03(500 - b_n) + 0,93b_n \\ &= 15 - 0,03b_n + 0,93b_n \\ &= 0,9b_n + 15 \end{aligned}$$

et donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 35 \\ 0,9b_n + 15 \end{pmatrix} = DX_n + B$

2. a. $10D = 10 \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9 I_2$

b. $Y_{n+1} = X_{n+1} - 10B$
 $= DX_n + B - 10B$
 $= DX_n - 9B$
 $= DX_n - 9 I_2 B$
 $= DX_n - 10DB$
 $= D(X_n - 10B)$
 $= DY_n$

c. $Y_n = X_n - 10B$
 donc $X_n = Y_n + 10B$
 $= D^n Y_0 + 10B$
 $= D^n (X_0 - 10B) + 10B.$

d. D diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 35 \\ 15 \end{pmatrix} \right) + 10 \begin{pmatrix} 35 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 - 350 \\ 300 - 150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 350 \\ 150 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -150 \\ 150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 350 \\ 150 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -150 \times 0,9^n \\ 150 \times 0,9^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 350 \\ 150 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -150 \times 0,9^n + 350 \\ 150 \times 0,9^n + 150 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} a_n = -150 \times 0,9^n + 350 \\ b_n = 150 \times 0,9^n + 150 \end{cases}$

3. $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (150 \times 0,9^n + 150) = 150$

donc le nombre d'ordinateurs défectueux va tendre vers 150.

④ 1. $u_2 = 6u_1 - 8u_0 = 6 \times 6 - 8 \times 1 = 28$
 $u_3 = 6u_2 - 8u_1 = 6 \times 28 - 8 \times 6 = 120$

2. $AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -8u_n + 6u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$

3. a. ♦ On pose $\mathcal{P}(n)$ l'égalité à montrer « $A^n = 2^n B + 4^n C$ » .
 ♦ Initialisation :

$$\begin{cases} A^0 = I_2 \\ 2^0 B + 4^0 C = B + C = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -0,5+0,5 \\ 4-4 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{cases}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

♦ Itération :

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n quelconque.

Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times (2^n B + 4^n C) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2^n AB + 4^n AC \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \begin{cases} AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \\ AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= 2^n \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \times 2 \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 4^n \times 4 \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n+1} B + 4^{n+1} C \end{aligned}$$

♦ Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b. ♦ On pose $\mathcal{Q}(n)$ l'égalité à montrer « $U_n = A^n U_0$ ».

♦ Initialisation :

$$A^0 \times U_0 = I_2 \times U_0 = U_0,$$

donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

♦ Itération :

Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour un certain n quelconque.

Alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= A \times U_n \\ &= A \times A^n \times U_0 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} \times U_0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ vraie.

♦ Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{cases} U_n = A^n U_0 \\ A^n = 2^n B + 4^n C \end{cases}$

donc :

$$\begin{aligned} U_n &= (2^n B + 4^n C) U_0 \\ &= 2^n B U_0 + 4^n C U_0 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \begin{cases} B U_0 = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } 2^n B U_0 = \begin{pmatrix} -2^n \\ -2^{n+1} \end{pmatrix} \\ C U_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ donc } 4^n C U_0 = \begin{pmatrix} 2 \times 4^n \\ 8 \times 4^n \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{On en déduit } \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n \\ -2^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \times 4^n \\ 8 \times 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times 4^n \\ -2^{n+1} + 8 \times 4^n \end{pmatrix}$$

et donc $u_n = 2 \times 4^n - 2^n$.

- ⑤ 1. a. On sait que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

$$u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$$

$$u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$$

$$u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$$

$$u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5$$

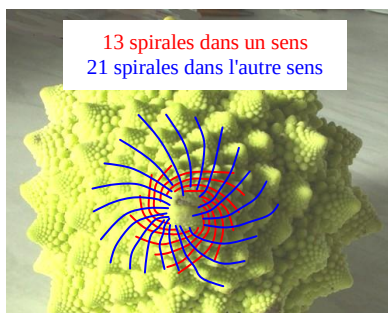
$$u_6 = u_5 + u_4 = 5 + 3 = 8$$

$$u_7 = u_6 + u_5 = 8 + 5 = 13$$

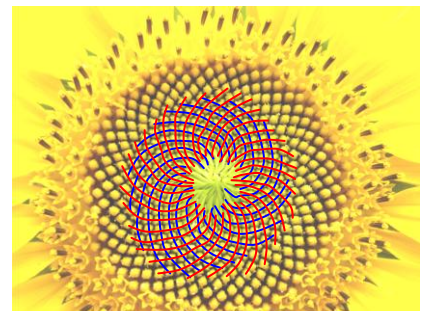
b.



Le cœur d'une fleur de tournesol



Un brocoli romanesco



Le cœur d'une fleur de tournesol

34 spirales dans un sens
21 spirales dans l'autre sens

Les nombres de spirales de la pomme de pin sont u_6 et u_7 , deux nombres de Fibonacci successifs.

$$u_8 = u_7 + u_6 = 13 + 8 = 21$$

Les nombres de spirales du brocoli romanesco sont u_7 et u_8 , deux nombres de Fibonacci successifs.

$$u_9 = u_8 + u_7 = 21 + 13 = 34$$

Les nombres de spirales du cœur de la fleur de tournesol sont u_8 et u_9 , deux nombres de Fibonacci successifs.

c. $a = 0$
 $b = 1$
for k in range(n) :
 $c = a+b$
 $a = b$
 $b = c$
print(a)

d. Avec la calculatrice, on obtient $u_{12} = 144$.

2. a. $F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $F^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 $F^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Par exemple, pour $n = 4$, on a le tableau de variables :

Ligne	k	a	b	c
L1		0		
L2		0	1	
L3	0	0	1	
L4	0	0	1	1
L5	0	1	1	1
L6	0	1	1	1
L3	1	1	1	1
L4	1	1	1	2
L5	1	1	1	2
L6	1	1	2	2
L3	2	1	2	2
L4	2	1	2	3
L5	2	2	2	3
L6	2	2	3	3
L3	3	2	3	3
L4	3	2	3	5
L5	3	3	3	5
L6	3	3	5	5

On voit que **a** contient la valeur de u_n à la fin de chaque passage dans la boucle.

Remarquez que si $n = 0$, on ne passe pas dans la boucle.

b. ♦ On pose $\mathcal{P}(n)$ l'égalité à montrer « $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$ ».

♦ Initialisation :

$$F^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1 & u_0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

♦ Itération :

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n quelconque.

$$\text{Montrons que } F^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} F^{n+1} &= F \times F^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} + u_n & u_n + u_{n-1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

♦ Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a. $F^{2n+2} = F^{n+n+2} = F^{n+2} \times F^n$
donc $\begin{pmatrix} u_{2n+3} & u_{2n+2} \\ u_{2n+2} & u_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ u_{n+2} & u_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3}u_{n+1} + u_{n+2}u_n & u_{n+3}u_n + u_{n+2}u_{n-1} \\ u_{n+2}u_{n+1} + u_{n+1}u_n & u_{n+2}u_n + u_{n+1}u_{n-1} \end{pmatrix}$

D'après l'égalité des coefficients de la 1^{ère} colonne et de la 2^{ème} ligne : $u_{2n+2} = u_{n+2}u_{n+1} + u_{n+1}u_n$.

b. $u_{2n+2} = u_{n+2}u_{n+1} + u_{n+1}u_n$

$$\begin{aligned} &= u_{n+2}(u_{n+2} - u_n) + (u_{n+2} - u_n)u_n \quad \text{car } u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = u_{n+2} - u_n \\ &= u_{n+2}^2 - u_{n+2}u_n + u_{n+2}u_n - u_n^2 \\ &= u_{n+2}^2 - u_n^2 \end{aligned}$$

c. Pour $n = 5$, on a $\begin{cases} u_{2n+2} = u_{12} = 144 = 12^2 \\ u_{2n+2} = u_7^2 - u_5^2 = 13^2 + 5^2 \end{cases}$

On en déduit $13^2 = 12^2 + 5^2$

Donc, d'après le théorème de Pythagore, le triangle de côtés 13, 12 et 5 est rectangle.

4. a.
$$F^p \times F^q = \begin{pmatrix} u_{p+1} & u_p \\ u_p & u_{p-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{q+1} & u_q \\ u_q & u_{q-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{p+1}u_{q+1} + u_p u_q & u_{p+1}u_q + u_p u_{q-1} \\ u_p u_{q+1} + u_{p-1}u_q & u_p u_q + u_{p-1}u_{q-1} \end{pmatrix}$$
D'autre part, $F^p \times F^q = F^{p+q} = \begin{pmatrix} u_{p+q+1} & u_{p+q} \\ u_{p+q} & u_{p+q-1} \end{pmatrix}.$

Donc, en identifiant les coefficients de la 1^{ère} colonne et de la 2^{ème} ligne, on a $u_{p+q} = u_p \times u_{q+1} + u_{p-1} \times u_q$.

- b. Si r divise u_p et u_q ,
alors r divise $u_p \times u_{q+1}$ et $u_{p-1} \times u_q$,
et alors r divise la somme $u_p \times u_{q+1} + u_{p-1} \times u_q = u_{p+q}$.
- c. ♦ On pose $\mathcal{Q}(n)$ la propriété à démontrer « u_p divise u_{np} ».
- ♦ Initialisation :
 u_p divise u_p
donc u_p divise $u_{1 \times p}$
donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
- ♦ Itération :
Supposons que $\mathcal{Q}(n)$: u_p divise u_{np} est vraie pour un certain n quelconque non nul.
Montrons que u_p divise $u_{(n+1)p} = u_{np+p}$.
- Alors :

$$\begin{cases} u_p \text{ divise } u_{np} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ u_p \text{ divise } u_p \end{cases}$$
donc, d'après la question b., u_p divise u_{np+p} .
- ♦ Conclusion :
Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- d. Si m n'est pas premier, alors on peut l'écrire pq avec $p \geq 2$ et $q \geq 2$.
Comme $m \geq 5$, p et q ne peuvent être égaux à 2.
Donc, l'un est supérieur ou égal à 3.
Supposons $p \geq 3$.
D'après la question c., u_p divise $u_{pq} = u_m$.
Or, $p \geq 3$ donc $u_p \geq u_3 = 2$.
Donc u_m n'est pas premier car divisible par un entier supérieur ou égal à 2.
- e. $u_{19} = 4\,181 = 37 \times 113$
La réciproque de la propriété peut s'écrire :
Si u_m n'est pas premier, alors m n'est pas premier.
Ou encore par contraposée :
Si m est premier, alors u_m est premier.
Or, $m = 19$ premier mais $u_m = 37 \times 113$ non premier : la réciproque est fausse.