Correction de **ARITHMÉTIQUE - Fiche 1**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳

---

① <u>Méthode avec la définition</u>

$20 \mid n$ donc $n = 20k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Alors :

$$\begin{aligned} 3n^2 + 2n + 100 &= 3\,(20k)^2 + 2\times 20k + 20\times 4 \\ &= 20\,(\,60k^2 + 2k + 4\,) \text{ avec } 60k^2 + 2k + 4 \in \mathbb{Z} \text{ car } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc 20 divise $3n^2 + 2n + 100$.

<u>Méthode avec les congruences</u>

$20 \mid n$ donc $n \equiv 0\ (20)$.

Alors :

$$\begin{aligned} 3n^2 + 2n + 100 &\equiv 3\times 0^2 + 2\times 0 + 100\ (20) \\ &\equiv 100\ (20) \\ &\equiv 0\ (20) \text{ car } 100 = 5\times 20 \end{aligned}$$

Donc 20 divise $3n^2 + 2n + 100$.

---

② <u>Méthode avec la définition</u>

$$\begin{aligned} (10^{101} + 4)^4 - (10^{101} - 1)^4 &= [\,(10^{101} + 4)^2 + (10^{101} - 1)^2\,]\,[\,(10^{101} + 4)^2 - (10^{101} - 1)^2\,] \qquad \leftarrow \text{Identité } a^2 - b^2. \\ &= [\,(\,10^{101} + 4\,)^2 + (\,10^{101} - 1\,)^2\,]\,[\,(10^{101} + 4) + (10^{101} - 1)\,]\,[\,(10^{101} + 4) - (10^{101} - 1)\,] \\ &= \underbrace{[\,(\,10^{101} + 4\,)^2 + (\,10^{101} - 1\,)^2\,]\,[\,(\,10^{101} + 4\,) + (\,10^{101} - 1\,)\,]}_{\text{entier}} \times 5 \end{aligned}$$

Donc $(10^{101} + 4)^4 - (10^{101} - 1)^4$ est de la forme $k\times 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$,
et donc divisible par 5 .

<u>Autre méthode avec la définition</u> :

appliquer la formule $a^n - b^n = (\,a - b\,)\,(\,a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + a\,b^{n-2} + b^{n-1}\,)$ vue dans le cours sur les complexes et qu'on peut utiliser aussi avec des réels et même des entiers

$$\begin{aligned} &(10^{101} + 4)^4 - (10^{101} - 1)^4 \\ &= [\,(10^{101} + 4) - (10^{101} - 1)\,]\,[\,(10^{101} + 4)^3 + (10^{101} + 4)^2\,(10^{101} - 1) + (10^{101} + 4)\,(10^{101} - 1)^2 + (10^{101} - 1)^3\,] \\ &= 5 \times \underbrace{[\,(10^{101} + 4)^3 + (10^{101} + 4)^2\,(10^{101} - 1) + (10^{101} + 4)\,(10^{101} - 1)^2 + (10^{101} - 1)^3\,]}_{\text{entier}} \end{aligned}$$

<u>Méthode avec les congruences</u>

$10 = 2\times 5$ donc $10 \equiv 0\ (5)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} (\,10^{101} + 4\,)^4 - (\,10^{101} - 1\,)^4 &\equiv (\,0^{101} + 4\,)^4 - (\,0^{101} - 1\,)^4 \\ &\equiv 4^4 - (-1)^4 \\ &\equiv 16^2 - 1 \\ &\equiv 1^2 - 1 \quad \text{car } 16 = 3\times 5 + 1 \\ &\equiv 0\ (5) \end{aligned}$$

Donc $(10^{101} + 4)^4 - (10^{101} - 1)^4$ est divisible par 5 .

---

③ <u>Méthode avec les congruences</u>

$6 = 1\times 7 - 1$ donc $6 \equiv -1\ (7)$.

Alors $6^{1999} + 1 \equiv (-1)^{1999} + 1$
$\equiv -1 + 1$
$\equiv 0\ (7)$

donc $6^{1999} + 1$ est divisible par 7 .

Pas de méthode avec la définition car 6^{1999} dépasse les capacités de calculs, de nous et de la calculatrice…

---

④ <u>Méthode avec la définition</u>

$\Delta = (-1)^2 - 4\times 2\times(-10) = 81 > 0$

donc la polynôme $2n^2 - n - 10$ possède deux racines $\dfrac{-(-1) + \sqrt{81}}{2\times 2} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{-(-1) - \sqrt{81}}{2\times 2} = -2$.

On en déduit la factorisation $2n^2 - n - 10 = 2\,(\,n - \dfrac{5}{2}\,)\,(\,n + 2\,) = (\,2n - 5\,)\,(\,n + 2\,)$ avec $(\,2n - 5\,) \in \mathbb{Z}$.

Donc, $2n^2 - n - 10$ divisible par $n + 2$.

Pas de méthode avec les congruences ici…

⑤ *a)* $8^3 - 1 = 512 - 1 = 511 =$
$511 : 7 \ = \ 73$ entier
On peut faire 73 paquets de 7.

b) Montrons que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $n^3 - 1$ est divisible par $n - 1$.

$$\begin{array}{rr|l} n^3 & -1 & n-1 \\ \hline -(n^3 - n^2) & & n^2 + n + 1 \\ \hline n^2 & -1 & \\ -(n^2 - n) & & \\ \hline n & -1 & \\ -(n & -1) & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$1^{ère}$ méthode (hors programme) : division posée de polynômes
On en déduit $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ avec $(n^2 + n + 1) \in \mathbb{Z}$
Cela peut permettre de tricher en partant du produit !
$(n-1)(n^2 + n + 1) \ = \ n^3 + n^2 + n - n^2 - n - 1$
$\qquad = \ n^3 - 1$
On en déduit $n^3 - 1 = (n-1)k$ avec $k = n^2 + n + 1 \in \mathbb{Z}$
donc $n^3 - 1$ est divisible par $n - 1$.

$2^{ème}$ méthode : utilisation de la factorisation du cours
On sait que, pour tous réels a et b :
$$a^m - b^m \ = \ (a - b)(a^{m-1} + ba^{m-2} + b^2a^{m-3} + b^3a^{m-4} + \ldots + b^{m-3}a^2 + b^{m-2}a + b^{m-1})$$
On en déduit pour $a = n$, $b = 1$ et $m = 3$:
$$n^3 - 1 = n^3 - 1^3 = (n-1)(n^2 + n + 1) \text{ avec } (n^2 + n + 1) \in \mathbb{Z}$$
donc $n^3 - 1$ est divisible par $n - 1$.

$3^{ème}$ méthode : identification
$1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$
donc 1 est racine de $n^3 - 1$
donc $n^3 - 1$ s'écrit sous la forme $(n-1)(an^2 + bn + c)$.
Donc :
$$n^3 - 1 \ = \ an^3 + bn^2 + cn - an^2 - bn - c$$
$$\Leftrightarrow \ n^3 - 1 \ = \ an^3 + (b - a)n^2 + (c - b)n - c$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$
On en déduit que $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ avec $(n^2 + n + 1) \in \mathbb{Z}$
donc $n^3 - 1$ est divisible par $n - 1$.

Pas de méthode avec les congruences.

---

⑥ *a)* Méthode avec la définition

Soit n un entier entre 0 et 9.
$\overline{nnn}_{(10)} \ = \ n \times 100 + n \times 10 + n \times 1$
$\qquad = \ n(100 + 10 + 1)$
$\qquad = \ n \times 111$
$\qquad = \ 37 \times 3n$ avec $3n \in \mathbb{Z}$
Donc $\overline{nnn}_{(10)}$ divisible par 37.

Méthode avec les congruences
$100 = 2 \times 37 + 26$ donc $100 \equiv 26 \ (37)$
On en déduit :
$\overline{nnn}_{(10)} \ = \ n \times 100 + n \times 10 + n \times 1$
$\qquad \equiv \ 26n + 10n + n$
$\qquad \equiv \ 37n$
$\qquad \equiv \ 0 \ (37)$
Donc $\overline{nnn}_{(10)}$ divisible par 37.

b) Méthode avec la définition

37 divise 333 et 777
donc il existe $t \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{Z}$ tel que $333 = 37t$ et $777 = 37s$.
Alors : $333^{777} - 777^{333} \ = \ (37t)^{777} - (37s)^{333}$
$\qquad = \ 37t \times (37t)^{776} - 37s \times (37s)^{332}$
$\qquad = \ 37\,(t \times (37t)^{776} - s \times (37s)^{332})$ avec $(t \times (37t)^{776} - s \times (37s)^{332}) \in \mathbb{Z}$.
Donc 37 divise $333^{777} - 777^{333}$.

Méthode avec les congruences
D'après le *a)*, $333 \equiv 0 \ (37)$ et $777 \equiv 0 \ (37)$.
Alors : $333^{777} - 777^{333} \ \equiv \ 0^{777} - 0^{333}$
$\qquad \equiv \ 0 \ (37)$
Donc 37 divise $333^{777} - 777^{333}$.

⑦ *Méthode avec les congruences*

$3^{n+3} - 4^{4n+2} = 3^n \times 3^3 - (4^4)^n \times 4^2 = 3^n \times 27 - 256^n \times 16$

Or : $\begin{cases} 27 = 2\times 11 + 5 \text{ donc } 27 \equiv 5 \ (11) \\ 256 = 23\times 11 + 3 \text{ donc } 4^4 \equiv 3 \ (11) \\ 16 = 1\times 11 + 5 \text{ donc } 16 \equiv 5 \ (11) \end{cases}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 3^{n+3} - 4^{4n+2} &= 3^n \times 27 - 256^n \times 16 \\ &\equiv 3^n \times 5 - 3^n \times 5 \\ &\equiv 0 \ (11) \end{aligned}$$

Donc $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11 .

---

⑧ *Méthode avec la définition*

Posons $n = \overline{abc}_{(10)} = a\times 100 + b\times 10 + c$
$= 99a + a + 9b + b + c$
$= 3 (33a + 3b) + a + b + c$

- Supposons $a + b + c$ divisible par 3.
  Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a + b + c = 3k$.
  $n = 3 (33a + 3b) + 3k$
  $= 3 (33a + 3b + k)$ avec $(33a + 3b + k) \in \mathbb{Z}$.
  Donc n divisible par 3.
- Réciproquement, supposons n divisible par 3.
  Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k$.
  $3k = 3 (33a + 3b) + a + b + c$
  $\Leftrightarrow a + b + c = 3k - 3 (33a + 3b) = 3 (k - 33a - 3b)$ avec $(k - 33a - 3b) \in \mathbb{Z}$.
  Donc $a + b + c$ divisible par 3.

Méthode avec les congruences

$n = \overline{abc}_{(10)} = a\times 100 + b\times 10 + c$
$\equiv a + b + c \ (3)$ car $100 = 3\times 33 + 1$ et $10 = 3\times 3 + 1$

On en déduit :

n divisible par 3
$\Leftrightarrow n \equiv 0 \ (3)$
$\Leftrightarrow n \equiv a + b + c \ (3)$
$\Leftrightarrow a + b + c$ divisible par 3.

---

⑨ *Méthode avec la définition*

Deux entiers impairs consécutifs s'écrivent $2k + 1$ et $2k + 3$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors : $(2k + 1) + (2k + 3) = 4k + 4 = 4 (k + 1)$ avec $(k + 1) \in \mathbb{Z}$.
Donc, la somme est bien divisible par 4 .

Pas de méthode avec les congruences.
Les impairs se caractérisent par $\equiv 0 \ (2)$ mais on ne peut pas préciser qu'ils sont consécutifs.

---

⑩ *Méthode avec la définition*

Si n impair, alors il peut s'écrire sous la forme $2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Alors : $n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1$
$= 4k^2 + 4k + 1 - 1$
$= 4 k (k + 1)$

k et $k + 1$ sont deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair.
Donc le produit $k (k + 1)$ est pair et s'écrit sous la forme $2h$, avec $h \in \mathbb{Z}$.
Donc : $n^2 - 1 = 4\times 2h = 8h$ divisible par 8 .

Pas de méthode avec les congruences.
Si n impair, alors $n \equiv 1 \ (2)$.
Alors : $n^2 - 1 \equiv 1^2 - 1 \equiv 0 \ (2)$ et on obtient une divisibilité par 2 et non par 8 .

---

⑪
- *1er cas* : Si a et b sont pairs, il existe k et h dans $\mathbb{Z}$ tels que $a = 2k$ et $b = 2h$.
  Alors : $a^2 - b^2 = (2k)^2 - (2h)^2 = 4k^2 - 4h^2 = 4 (k^2 - h^2)$ avec $(k^2 - h^2) \in \mathbb{Z}$.
- *2ème cas* : Si a et b sont impairs, il existe k et h dans $\mathbb{Z}$ tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2h + 1$.
  Alors : $a^2 - b^2 = (2k + 1)^2 - (2h + 1)^2$
  $= 4k^2 + 4k + 1 - 4h^2 - 4h - 1$
  $= 4 (k^2 + k - h^2 - h)$ avec $(k^2 + k - h^2 - h) \in \mathbb{Z}$.

Donc, dans les deux cas, $a^2 - b^2$ est divisible par 4.

Pas de méthode avec les congruences.

---

⑫ *a)* Lorsqu'on fait la division euclidienne de n par 3, le reste peut être 0, ou 1 ou 2 .
Donc n s'écrit $3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$ avec k entier.

b) Méthode avec la définition

- *1^er^ cas* : Si $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

  $n(2n^2+1) = 3k(2\times 9k^2+1)$ avec $k(2\times 9k^2+1) \in \mathbb{Z}$.
- *2^ème^ cas* : Si $n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

  $$\begin{aligned} n(2n^2+1) &= (3k+1)(2\times(3k+1)^2+1) \\ &= (3k+1)(18k^2+12k+3) \\ &= 3\times(3k+1)(6k^2+4k+1) \quad \text{avec } (3k+1)(6k^2+4k+1) \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$
- *3^ème^ cas* : Si $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

  $$\begin{aligned} n(2n^2+1) &= (3k+2)(2\times(3k+2)^2+1) \\ &= (3k+2)(18k^2+24k+9) \\ &= 3\times(3k+2)(6k^2+8k+3) \quad \text{avec } (3k+2)(6k^2+8k+3) \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Dans tous les cas, 3 divise $n(2n^2+1)$.

Méthode avec les congruences

- *1^er^ cas* : Si $n \equiv 0 \ (3)$

  $n(2n^2+1) \equiv 0(2\times 0^2+1) \equiv 0 \ (3)$
- *2^ème^ cas* : Si $n \equiv 1 \ (3)$

  $$\begin{aligned} n(2n^2+1) &\equiv 1(2\times 1^2+1) \\ &\equiv 1\times 3 \equiv 0 \ (3) \end{aligned}$$
- *3^ème^ cas* : Si $n \equiv 2 \ (3)$

  $$\begin{aligned} n(2n^2+1) &\equiv 2(2\times 2^2+1) \\ &\equiv 2\times 9 \equiv 0 \ (3) \end{aligned}$$

Dans tous les cas, 3 divise $n(2n^2+1)$.

---

⑬ Méthode avec les congruences

- *1^er^ cas* : Si $n \equiv 0 \ (6)$

  $n(n^2+5) \equiv 0(0^2+5) \equiv 0 \ (6)$
- *2^ème^ cas* : Si $n \equiv 1 \ (6)$

  $n(n^2+5) \equiv 1(1^2+5) \equiv 6 \equiv 0 \ (6)$
- *3^ème^ cas* : Si $n \equiv 2 \ (6)$

  $n(n^2+5) \equiv 2(2^2+5) \equiv 18 \equiv 0 \ (6)$
- *4^ème^ cas* : Si $n \equiv 3 \ (6)$

  $n(n^2+5) \equiv 3(3^2+5) \equiv 42 \equiv 0 \ (6)$
- *5^ème^ cas* : Si $n \equiv 4 \ (6)$

  $n(n^2+5) \equiv 4(4^2+5) \equiv 84 \equiv 0 \ (6)$ car $84 = 14\times 6$
- *6^ème^ cas* : Si $n \equiv 5 \ (6)$

  $n(n^2+5) \equiv 5(5^2+5) \equiv 150 \equiv 0 \ (6)$ car $150 = 25\times 6$

Dans tous les cas, $n(n^2+5)$ est divisible par 6 .

---

⑭ On pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $4^n - 1$ est un multiple de 3 » .

- Initialisation :
  $4^0 - 1 = 0$ multiple de 3 , donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Itération :
  Supposons $\mathcal{P}(n)$: $4^n - 1$ multiple de 3 pour un certain n quelconque.
  Montrons $\mathcal{P}(n+1)$: $4^{n+1} - 1$ multiple de 3 .

  Méthode avec la définition

  Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n - 1 = 3k$,
  donc $4^n = 3k+1$.

  Alors : $$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4\times 4^n - 1 \\ &= 4(3k+1) - 1 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3\times 4k + 4 - 1 \\ &= 3(4k+1) \quad \text{avec } (4k+1) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

  Donc, $4^{n+1} - 1$ est bien un multiple de 3 .

Méthode avec les congruences

Par hypothèse de récurrence, $4^n - 1 \equiv 0 \ (3)$ et donc $4^n \equiv 1 \ (3)$.
Alors : $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 \equiv 4 \times 1 - 1$
$\equiv 3 \equiv 0 \ (3)$
Donc, $4^{n+1} - 1$ est bien un multiple de 3 .

- Conclusion :
Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

---

⑮ On pose $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $4^n + 1$ est un multiple de 3 » .

- Itération :

Méthode avec la définition

Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain n quelconque.
Montrons $\mathscr{P}(n+1)$: $4^{n+1} + 1$ multiple de 3 .

Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 1 = 3k$,
donc $4^n = 3k - 1$.

Alors : $4^{n+1} + 1 = 4 \times 4^n + 1$
$= 4 (3k - 1) + 1$
$= 3 \times 4k - 4 + 1$
$= 3 (4k - 1)$
Donc, $4^{n+1} + 1$ est bien un multiple de 3 .

La propriété est bien héréditaire.

- Initialisation impossible :
On a déjà démontré que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3 .
Donc, $4^n - 1 = 3k$, avec k un entier
$\Leftrightarrow$ $4^n = 3k + 1$, avec k un entier
$\Leftrightarrow$ $4^n + 1 = 3k + 2$, avec k un entier
Or, $3k + 2$ ne peut être un multiple de 3 .

Donc, la propriété ne peut être initialisée à aucun rang.

---

⑯ Posons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $n (n^2 + 5)$ est divisible par 6 » .

- Initialisation :
$0 \times (0^2 + 5) = 0$ divisible par 6 .
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Itération :
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un n quelconque.
Montrons que $\mathscr{P}(n + 1)$: $(n + 1) ((n + 1)^2 + 5)$ est divisible par 6 .

Méthode avec la définition

Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n (n^2 + 5) = 6k$,

$(n + 1) ((n + 1)^2 + 5) = (\mathbf{n} + 1) (\mathbf{n^2} + 2n + 1 \mathbf{+ 5})$
$= \mathbf{n (n^2 + 5)} + n (2n + 1) + (n^2 + 2n + 1 + 5)$
$= n (n^2 + 5) + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 6$
$= n (n^2 + 5) + 3n^2 + 3n + 6$
$= 6k + 3n^2 + 3n + 6$
$= 6 (k + 1) + 3n (n + 1)$

Or, n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair.
Donc le produit $n (n + 1)$ est pair et s'écrit sous la forme $2h$, avec $h \in \mathbb{Z}$.
Donc : $(n + 1) ((n + 1)^2 + 5) = 6 (k + 1) + 3 \times 2h$
$= 6 (k + 1 + h)$ avec $(k + 1 + h) \in \mathbb{Z}$.

- Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

---

⑰ *a)* Supposons $n - 3$ divise $n + 5$.

Alors, on a nécessairement $\begin{cases} n - 3 \text{ divise } n + 5 \\ n - 3 \text{ divise } n - 3 \end{cases}$
donc $n - 3$ divise la différence $(n + 5) - (n - 3)$ qui vaut 8 .

On en déduit que $n - 3$ est nécessairement parmi les diviseurs de 8 qui sont -8 ; -4 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 4 et 8 ,
donc n est parmi les valeurs -5 ; -1 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ou 11 .

b)

si n égale	-5	-1	1	2	4	5	7	11
alors $n - 3$ égale	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
et $n + 5$ égale	0	4	6	7	9	10	12	16

et donc, pour chaque valeur, $n - 3$ divise $n + 5$.

Conclusion : les entiers possibles sont -5 ; -1 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 et 11 .

La réciproque est indispensable car les valeurs trouvées ne sont pas nécessairement toutes bonnes.
Par exemple, on pourrait dire :
Supposons $n-3$ divise $n+5$.
Alors, on a nécessairement $\begin{cases} n-3 \text{ divise } 2(n+5) \\ n-3 \text{ divise } 2(n-3) \end{cases}$
donc $n-3$ divise la différence $2(n+5)-2(n-3)$ qui vaut 16.
Alors, $n-3$ pourrait prendre les valeurs supplémentaires 16 et -16 et n pourrait valoir 19 ou -13.
Or alors, pour $n=19$, on a $n-3=16$ et $n+5=24$ et on voit que $n-3$ ne divise pas $n+5$.
Idem pour $n=-13$, on a $n-3=-16$ et $n+5=-8$ et on voit que $n-3$ ne divise pas $n+5$.

⑱ Avec le même raisonnement qu'au ⑰, on obtient les valeurs $-6\,;-2\,;0$ et 4.

⑲ Avec le même raisonnement qu'au ⑰, on obtient les valeurs -3 et -1.

⑳ *a)* $x+6 \equiv 5\ (3)$
$\Leftrightarrow x+6-6 \equiv 5-6\ (3)$
$\Leftrightarrow x \equiv -1\ (3)$
$\Leftrightarrow x \equiv 2\ (3)$
Donc, les solutions sont tous les entiers de la forme $3k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) $3x+1 \equiv 6\ (4)$
$\Leftrightarrow 3x+1-1 \equiv 6-1\ (4)$
$\Leftrightarrow 3x \equiv 5\ (4)$
$\Leftrightarrow 3x \equiv 1\ (4)$

- *1^er^ cas* : Si $x \equiv 0\ (4)$
  alors, $3x \equiv 3\times 0 \equiv 0\ (4)$: impossible
- *2^ème^ cas* : Si $x \equiv 1\ (4)$
  alors, $3x \equiv 3\times 1 \equiv 3\ (4)$: impossible
- *3^ème^ cas* : Si $x \equiv 2\ (4)$
  alors, $3x \equiv 3\times 2 \equiv 6 \equiv 2\ (4)$: impossible
- *4^ème^ cas* : Si $x \equiv 3\ (4)$
  alors, $3x \equiv 3\times 3 \equiv 9 \equiv 1\ (4)$

Donc, les solutions sont tous les entiers de la forme $4k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) $2x^2+7x-3 \equiv 6\ (5)$
$\Leftrightarrow 2x^2+7x-3+3 \equiv 6+3\ (5)$
$\Leftrightarrow 2x^2+7x \equiv 9\ (5)$
$\Leftrightarrow 2x^2+7x \equiv 4\ (5)$

- *1^er^ cas* : Si $x \equiv 0\ (5)$
  alors, $2x^2+7x \equiv 2\times 0^2+7\times 0 \equiv 0\ (5)$: impossible
- *2^ème^ cas* : Si $x \equiv 1\ (5)$
  alors, $2x^2+7x \equiv 2\times 1^2+7\times 1 \equiv 9 \equiv 4\ (5)$
- *3^ème^ cas* : Si $x \equiv 2\ (5)$
  alors, $2x^2+7x \equiv 2\times 2^2+7\times 2 \equiv 22 \equiv 2\ (5)$: impossible
- *4^ème^ cas* : Si $x \equiv 3\ (5)$
  alors, $2x^2+7x \equiv 2\times 3^2+7\times 3 \equiv 39 \equiv 4\ (5)$
- *5^ème^ cas* : Si $x \equiv 4\ (5)$
  alors, $2x^2+7x \equiv 2\times 4^2+7\times 4 \equiv 60 \equiv 0\ (5)$: impossible

Donc, les solutions sont de la forme $5k+1$ ou de la forme $5k+3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Dans $\{0\,;1\,;2\,;\dots;20\}$, les solutions sont $1=5\times 0+1$; $3=5\times 0+3$; $6=5\times 1+1$; $8=5\times 1+3$; $11=5\times 2+1$; $13=5\times 2+3$; $16=5\times 3+1$ et $18=5\times 3+3$.