Savoir ÉTUDIER DES GRAPHES

Ce que je dois avoir compris

- Un **graphe** est un schéma composé de points reliés modélisant des relations entre plusieurs objets.
  Remarque : Le terme " graphe " est assez récent puisqu'il a été introduit en 1822 par l'anglais James J. Sylvester.

  Les points sont les **sommets** et les liens entre les points sont les **arêtes**.
  Le nombre total de sommets est **l'ordre** du graphe.
  Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
  Le nombre d'arêtes liées à un sommet est appelé le **degré** du sommet.
  Une arête qui relie un sommet à lui-même est une **boucle**. Elle apporte deux degrés à son sommet.

- Comme chaque arête contribue aux degrés des deux sommets qu'elle relie, on en déduit facilement que **la somme des degrés des sommets vaut le double du nombre d'arêtes**.
  Remarque : Cette propriété permet de **dénombrer les arêtes** en évitant de les compter une par une, au risque facile d'en oublier ou d'en compter deux fois. Il suffit d'ajouter les degrés sommet par sommet puis de diviser par deux.

- Une partie d'un graphe constitué de certains sommets et des arêtes qui relient ces sommets est appelé **sous-graphe**.
  Si un graphe ne comporte aucun sous-graphe non reliés aux autres, il est dit **connexe**.

- Si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle, le graphe est dit **simple**.
  Si chaque sommet est adjacent à tous les autres sommets, le graphe est dit **complet**.

- Si la relation entre deux sommets ne va que dans un sens (relation unilatérale), l'arête est un **arc**.
  On dit que le graphe est **orienté**.
  Dans un graphe orienté, { le nombre d'arcs partant d'un sommet est appelé le **degré sortant** du sommet,
  le nombre d'arcs arrivant à un sommet est appelé le **degré entrant** du sommet.

Ce que je dois savoir faire

- **Décrire un graphe**
  En donnant ses propriétés : ordre, complet, simple, connexe, orienté.

- **Dénombrer les arêtes**
  Il faut généralement éviter de les compter une par une, au risque facile d'en oublier ou d'en compter deux fois.
  Il suffit d'ajouter les degrés sommet par sommet puis de diviser par deux.

- **Représenter une situation concrète par un graphe**
  Repérer quels objets représentent les sommets et quelles relations représentent les arêtes ou les arcs.

Remarques sur les exercices

- Les exercices ① à ① permettent de se familiariser avec les nombreux mots de vocabulaire.
- L'exercice ④ , assez court, utilise des matrices pour étudier une suite récurrente double : u_{n+1} est exprimé en fonction de u_{n+1} et de u_n .
- L'exercice ⑤ est un long problème où on étudie la suite de Fibonacci, définie par une récurrence double.
  On retrouve des questions d'arithmétique en fin de problème.

---

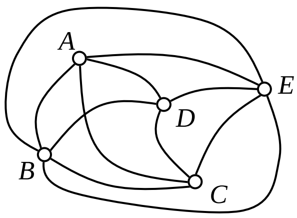
① **a.** Donner un exemple de graphes simples et complets d'ordres 2, 3, 4, 5 et 6.
Pour chaque graphe, donner le nombre d'arêtes et la somme des degrés des sommets.

On donne un graphe simple et complet d'ordre n , avec n entier supérieur ou égal à 2.

b. Donner la somme des degrés des sommets en fonction de n .

c. Démontrer par récurrence que le nombre d'arêtes vaut $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

② **2.1.** Pour le graphe ci-contre :



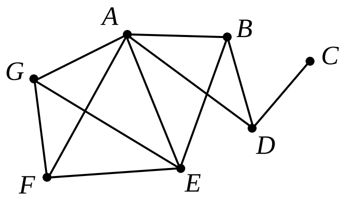
a. Donner son ordre et le degré de chaque sommet.

b. Trouver le nombre d'arêtes.

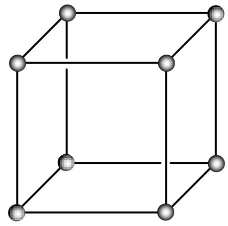
c. Préciser s'il est simple.
Sinon, supprimer le minimum d'arêtes pour le rendre simple.

d. Préciser s'il est complet.
Sinon, extraire un sous-graphe complet du plus grand ordre possible.

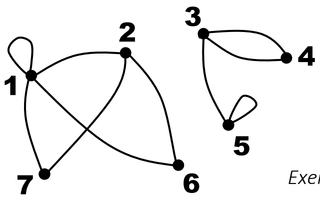
2.2. Mêmes questions pour le graphe ci-contre :



2.3. Mêmes questions pour le graphe ci-contre, exemple de graphe dans l'espace :



2.4. Mêmes questions pour le graphe ci-contre :



Exemple de graphe non connexe

---

③ Démontrer par une méthode exhaustive qu'un graphe simple d'ordre 4 ne peut avoir qu'un nombre pair de sommets de degrés impairs.

---

④ Lors d'un congrès, 35 scientifiques se rencontrent et se serrent la main.
Utiliser un graphe pour compter le nombre de poignées de mains.

---

⑤ On veut organiser un tournoi de handball avec 7 équipes.
Pour des raisons de calendrier, la direction du tournoi décide que chaque équipe ne jouera que contre 3 autres équipes.
Les organisateurs sont perplexes... Pourquoi ?

---

⑥ On rappelle que les nombres pairs sont de la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et que les nombres impairs sont de la forme $2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a. Montrer que la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.

n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

b. Montrer qu'une somme de n entiers pairs est toujours paire.

c. Montrer par récurrence qu'une somme de n entiers impairs est paire si n est pair, impaire sinon.

d. Montrer par l'absurde que, dans un graphe, le nombre de sommets de degrés impairs est pair.

---

⑦ On considère le graphe dont les arêtes modélisent les frontières terrestres entre les pays du monde entier.

1. Quel est le degré de la France métropolitaine ?

2. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.

3. Citer un pays de degré 1.

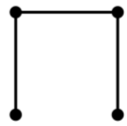
---

⑧ **a.** Modéliser par un graphe les frontières terrestres des pays d'Asie du Sud-Est suivants : Myanmar, Thaïlande, Laos, Vietnam, Cambodge, Malaisie, Singapour.

b. Mêmes questions si on ajoute la Chine et l'Indonésie.

---

⑨ On donne le graphe $\mathcal{G}$ ci-contre.



a. Partager une île en quatre pays dont $\mathcal{G}$ modélise les frontières.

b. Modifier le partage si on ferme le carré.

c. Modifier le partage si on ajoute une diagonale.

d. Modifier le partage si on ajoute les deux diagonales.

---

⑩ Le **problème des sept ponts de Königsberg** est connu pour être à l'origine de la théorie des graphes. Il a été résolu par Leonhard Euler en 1735.
La ville de Königsberg est construite autour d'une île située sur le fleuve Pregel. Sept ponts relient les rives du fleuve, comme représentés sur la carte ancienne ci-contre.
Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.

a. Modéliser la situation par un graphe dont les sommets N , S, E et I représentent respectivement le quartier nord, le quartier sud, le quartier est et l'ile de Kant.

b. Partager une île en quatre pays dont le graphe modélise les frontières.

---

⑪ On définit le graphe G dont les sommets sont les entiers naturels de 1 à 20 et où deux sommets sont adjacents si la somme des nombres qu'ils représentent est paire.

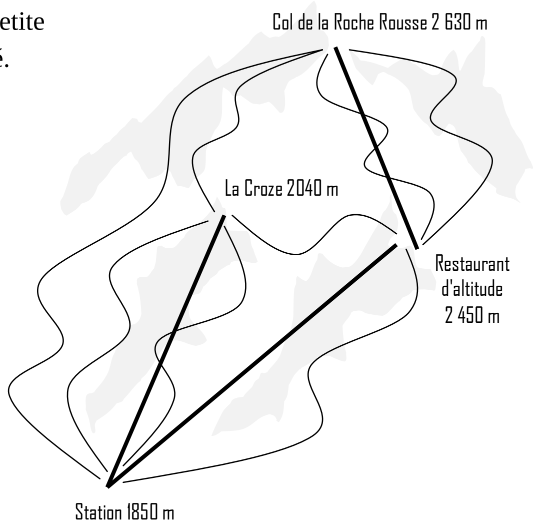
a. Quel est l'ordre de G ?

b. G est-il complet ? Connexe ?

c. Quel est le nombre d'arêtes de G ?

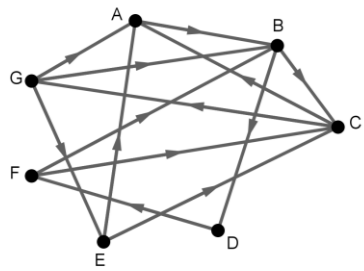
---

⑫ Modéliser les trajets possibles de cette petite station de ski alpin par un graphe orienté.



---

⑬ On considère le graphe orienté ci-contre :



a. Déterminer la somme des degrés entrants et la somme des degrés sortants.

b. Quel est le nombre d'arcs ?