

Savoir UTILISER UN INTERVALLE DE CONFIANCECe que je dois savoir faire

- **Calculer un intervalle de confiance**

- Je repère dans l'énoncé la population et la caractéristique étudiée, dont on ne connaît pas la proportion p .
- Je présente sur la copie l'échantillon représentatif et sa taille n , puis la fréquence de confiance f_c de la caractéristique dans cet échantillon (en général à calculer).
- Je vérifie les conditions $n \geq 25$ et $0,2 \leq f_c \leq 0,8$.

Si la fréquence f_c est trop grande ou trop petite pour ces conditions, je vérifie celles-ci :
$$\begin{cases} n \geq 30 \\ n f_c \geq 5 \\ n(1-f_c) \geq 5. \end{cases}$$

- Je calcule la borne inférieure $f_c - \frac{1}{\sqrt{n}}$ arrondie par défaut et la borne supérieure $f_c + \frac{1}{\sqrt{n}}$ arrondie par excès.

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est alors $\left[f_c - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_c + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

- **Estimer une proportion inconnue**

- La proportion p inconnue est dans l'intervalle $\left[f_c - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_c + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ au niveau de confiance 0,95.
- Une fois la proportion estimée, on peut vous demander d'en tirer des conclusions concrètes (par exemple, sur les chances d'un candidat à l'élection).

- **Calculer la taille de l'échantillon pour avoir une amplitude maximale donnée de l'intervalle de confiance**

- L'intervalle de confiance a une amplitude (ou largeur) de $\frac{2}{\sqrt{n}}$.
- On résout l'inéquation $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \text{amplitude maximale}$ et on obtient la valeur minimale de n .

1. Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation d'une crème.

Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit.

Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.

Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2014

2. Le responsable d'un magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux. Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

D'après Baccalauréat Centres Étrangers 2015

3. Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes. Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.
 - a) À l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95%, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans.
 - b) Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 ?

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2016

4. Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95%, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.

Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

- a. 400 b. 800 c. 1 600 d. 3 200

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2015

5. Un institut de sondage publie les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.

*estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire ?

D'après Baccalauréat Liban 2015

6. Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.

La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.

On note :

A l'évènement « le composant provient de la chaîne A »

B l'évènement « le composant provient de la chaîne B »

S l'évènement « le composant est sans défaut »

- a) Montrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,89$.
- b) Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A.
On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.

Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de 0,92.

- a) Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.
- b) Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de 0,02 ?

D'après Baccalauréat Métropole 2016

7. Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».

La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est 0,17. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est 0,10.

La source A fournit 70 % de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée.

On considère les événements suivants :

A : « La bouteille d'eau provient de la source A »

B : « La bouteille d'eau provient de la source B »

S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

- Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.
- Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut 0,149.
- Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.
- Le lendemain d'une forte pluie, l'usine prélève un échantillon de 1 000 bouteilles provenant de la source A. Parmi ces bouteilles, 211 contiennent de l'eau très peu calcaire.
Donner un intervalle permettant d'estimer au seuil de 95 % la proportion de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire sur l'ensemble de la production de la source A après cette intempérie.

D'après Baccalauréat Nouvelle Calédonie 2015

8. Les valeurs seront arrondies au millième.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère.

Aussi, elle propose le protocole ($\mathcal{P}$) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.

Pour chaque jeune de cet échantillon :

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;
- si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
- si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
- si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

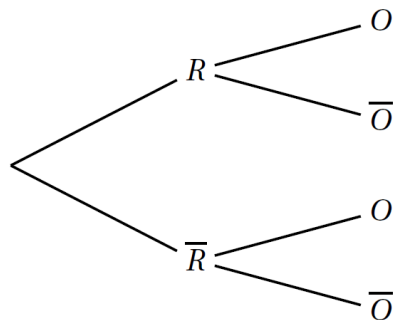
On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

- a) Calculs de probabilités

On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole ($\mathcal{P}$).

On note R l'évènement « le résultat du lancer est pair », O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

b) Intervalle de confiance

- 1) À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole ($\mathcal{P}$).
Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.
- 2) Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

D'après Baccalauréat Pondichéry 2016