

Correction de PROBABILITÉS - Fiche 2

- ① 1. Il faut comprendre que $Z = 2$ quand $X + Y = 2$,
 Or $\begin{cases} X \text{ prend les valeurs } 1, 2, 3, 4, 5 \text{ et } 6 \\ Y \text{ prend les valeurs } 1, 2, 3 \text{ et } 4, \end{cases}$ donc $X + Y = 2$ uniquement quand $X = 1$ et $Y = 1$.

$$\begin{aligned} P(Z = 2) &= P((X = 1); (Y = 1)) \\ &= P(X = 1) \times P(Y = 1) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$Z = 3$ quand $X + Y = 3$, c'est-à-dire quand $X = 1$ et $Y = 2$ mais aussi quand $X = 2$ et $Y = 1$.

$$\begin{aligned} P(Z = 3) &= P((X = 1); (Y = 2)) + P((X = 2); (Y = 1)) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{24} \end{aligned}$$

$Z = 4$ quand $X = 1$ et $Y = 3$ ou quand $X = 2$ et $Y = 2$ ou quand $X = 3$ et $Y = 1$.

$$\begin{aligned} P(Z = 4) &= P((X = 1); (Y = 3)) + P((X = 2); (Y = 2)) + P((X = 3); (Y = 1)) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{24} \end{aligned}$$

Un tableau croisé permet de bien visualiser les événements couples et leurs probabilités :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Comme les 24 cases sont équiprobables, on voit bien par exemple que $P(Z = 4) = \frac{3}{24}$.

C'est notamment efficace quand on doit déterminer la loi de probabilité, c'est-à-dire toutes les probabilités...

2. ♦ On a le choix entre deux méthodes :
- appliquer la formule "artisanale" $E(Z) = P(Z = 1) \times 1 + P(Z = 2) \times 2 + \dots + P(Z = 10) \times 10$ qui nécessite de calculer les neuf probabilités $P(Z = k)$ car les couples ne sont pas équiprobables,
 - calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et les ajouter, ce qui va aller très vite car les faces équiprobables rendent les calculs très simples.

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 \quad \rightarrow \text{Qu'on peut écrire } \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \\ &= 3,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 4 \quad \rightarrow \text{Qu'on peut écrire } \frac{1}{4} (1 + 2 + 3 + 4) \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

Donc, par linéarité de l'espérance, $E(Z) = E(X) + E(Y) = 3,5 + 2,5 = 6$.

- ♦ De même pour la variance.

Mais attention, ce n'est possible que parce que les deux expériences sont indépendantes ! Et il faut le préciser...

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (2 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (3 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (4 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (5 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 \\ &\approx 2,92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{4} \times (1 - 2,5)^2 + \frac{1}{4} \times (2 - 2,5)^2 + \frac{1}{4} \times (3 - 2,5)^2 + \frac{1}{4} \times (4 - 2,5)^2 \\ &= 1,25 \end{aligned}$$

Les deux lancers de dés sont indépendants, $\rightarrow$ À ne pas oublier !
 donc $V(Z) = V(X) + V(Y) \approx 2,92 + 1,25 = 4,17$.

- ② 1. $\begin{cases} X_1 \text{ prend les valeurs } 0 \text{ et } 1 \\ X_2 \text{ prend les valeurs } 0 \text{ et } 1, \end{cases}$ donc $X_1 + X_2$ prend les valeurs $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ et $1 + 1 = 2$.

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P((X_1 = 0); (X_2 = 0)) \\ &= P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) \text{ d'après le principe multiplicatif} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

De même : $P(Z = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$ et $P(Z = 2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$. $\rightarrow$ Accepté si vous avez bien rédigé le premier calcul.

La loi de probabilité est : $\rightarrow$ Pas obligé mais très habituel.

k	0	1	2
$P(Z = k)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

2. ♦ 1^{ère} méthode : appliquer la formule "artisanale"

$$E(Z) = \frac{9}{25} \times 0 + \frac{12}{25} \times 1 + \frac{4}{25} \times 2 = 0,8$$

2^{ème} méthode : avec la somme des espérances

$$E(X_1) = \frac{3}{5} \times 0 + \frac{2}{5} \times 1 = 0,4$$

Les tirages sont faits avec remise donc les deux tirages sont identiques, donc $E(X_2) = E(X_1)$.

Donc, par linéarité de l'espérance, $E(Z) = E(X_1) + E(X_2) = 0,4 + 0,4 = 0,8$.

La formule artisanale est ici plus rapide.

- ♦ De même pour la variance.

1^{ère} méthode : appliquer la formule "artisanale"

$$V(Z) = \frac{9}{25} \times (0 - 0,8)^2 + \frac{12}{25} \times (1 - 0,8)^2 + \frac{4}{25} \times (2 - 0,8)^2 = 0,48$$

2^{ème} méthode : avec la somme des variances

$$V(X_1) = \frac{3}{5} \times (0 - 0,4)^2 + \frac{2}{5} \times (1 - 0,4)^2 = 0,24$$

Les tirages sont faits avec remise donc les deux tirages sont identiques et indépendants, donc $V(X_2) = V(X_1)$

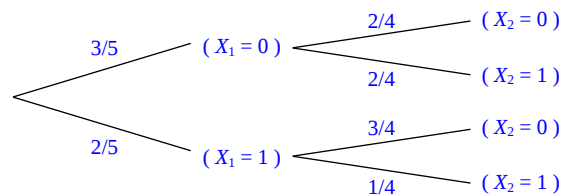
et donc $V(Z) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times 0,24 = 0,48$.

Là aussi, la formule artisanale est plus rapide.

- ③ 1. $X_1 + X_2$ prend de nouveau les valeurs 0, 1 et 2.

Mais nous ne sommes plus en situation d'indépendance puisqu'il y a remise.

Dans une situation de conditionnement, on peut revenir aux bons vieux arbres...



$$P(Z=0) = P_{(X_1=0)}(X_2=0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

$$P(Z=1) = P_{(X_1=0)}(X_2=1) + P_{(X_1=1)}(X_2=0) \text{ d'après la formule des probabilités totales}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20}$$

$$P(Z=2) = P_{(X_1=1)}(X_2=1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

La loi de probabilité est :

k	0	1	2
$P(Z=k)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$

2. Pour l'espérance et la variance, utilisons les formules "artisanales".

$$E(Z) = \frac{6}{20} \times 0 + \frac{12}{20} \times 1 + \frac{2}{20} \times 2 = 0,8$$

→ Tiens... l'espérance est la même que dans le ②...

$$V(Z) = \frac{6}{20} \times (0 - 0,8)^2 + \frac{12}{20} \times (1 - 0,8)^2 + \frac{2}{20} \times (2 - 0,8)^2 = 0,36$$

→ ... mais pas la variance.

Voyons en détail les points communs et les différences de la situation ③ sans remise par rapport à la situation ② avec remise.

Pour l'espérance :

$E(X_1)$ vaut toujours 0,4.

Calculons $E(X_2)$.

Pour cela, il nous faut $P(X_2=0)$ et $P(X_2=1)$:

$$\text{D'après la formule des probabilités totales, } P(X_2=0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \text{ et donc } P(X_2=1) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

On constate que les probabilités de $(X_2=0)$ et $(X_2=1)$ sont les mêmes que celles de $(X_1=0)$ et $(X_1=1)$.

Ces probabilités ne dépendent pas du mode de tirage, avec ou sans remise... Et donc les deux espérances $E(X_1)$ et $E(X_2)$ non plus.

Puisqu'on a $E(X_2) = E(X_1)$ et que la linéarité s'applique avec ou sans indépendance, on obtient : $E(Z) = E(X_1) + E(X_2) = 2 \times 0,4 = 0,8$.

Et donc l'espérance de la somme ne dépend pas du mode de tirage

Pour la variance :

Les probabilités et l'espérance étant les mêmes que pour le tirage avec remise, on a encore $V(X_1) = V(X_2) = 0,24$ calculées dans le ②.

Mais $V(X_1) + V(X_2) = 0,48$ ne vaut pas $V(Z) = 0,36$! La linéarité n'est pas applicable.

Donc, les deux variances $V(X_1)$ et $V(X_2)$ ne dépendent pas du mode de tirage mais la variance de la somme si !...

- ④ 1. $P(X=3) = 1 - (0,2 + 0,3) = 0,5$
 donc $E(X) = 0,2 \times 1 + 0,3 \times 2 + 0,5 \times 3 = 2,3$
 et $V(X) = 0,2 \times (1 - 2,3)^2 + 0,3 \times (2 - 2,3)^2 + 0,5 \times (3 - 2,3)^2 = 0,61$
2. $E(Y) = E(3X) = 3 E(X) = 3 \times 2,3 = 6,9$
 $V(Y) = V(3X) = 3^2 V(X) = 9 \times 0,61 = 5,49 \rightarrow$ Attention au carré !

- ⑤ ♦ *Attention ! Pas de linéarité sur les écarts types...*
 X et Y sont indépendantes
 donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
 $= 3^2 + 4^2 = 25$ $\rightarrow$ On calcule d'abord la variance avec la linéarité donnée par l'indépendance...
 donc $\sigma(X + Y) = \sqrt{25} = 5$. $\rightarrow$... puis on en déduit l'écart type.
- ♦ X et Y indépendantes
 donc $2X$ et $-Y$ indépendantes
 donc $V(2X - Y) = V(2X) + V(-Y)$
 $= 2^2 V(X) + (-1)^2 V(Y)$
 $= 4 \times 9 + 16 = 52$
- ♦ $V(-3X + 1) = (-3)^2 V(X)$
 $= 9 \times 9 = 81$

- ⑥ 1. $\begin{cases} X \text{ prend les valeurs entières de } 1 \text{ à } 7 \\ Y \text{ prend les valeurs entières de } 0 \text{ et } 50, \end{cases}$ donc $X + Y$ prend les valeurs entières de 1 à 57.
2. ♦ D'une part, X suit la loi uniforme sur $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, donc
 $E(X) = \frac{1}{7} \times 1 + \frac{1}{7} \times 2 + \frac{1}{7} \times 3 + \frac{1}{7} \times 4 + \frac{1}{7} \times 5 + \frac{1}{7} \times 6 + \frac{1}{7} \times 7$ $\rightarrow$ Qu'on peut écrire $\frac{1}{7}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$.
 $= 4$
- ♦ D'autre part, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; \frac{1}{4})$, donc $E(Y) = 50 \times \frac{1}{4} = 12,5$.
- ♦ On en déduit : $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 4 + 12,5 = 16,5$.

- ⑦ ♦ Posons X_1 la variable aléatoire qui donne le gain du premier lancer.
 $E(X_1) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = 3,5$
- Les 10 lancers représentent des expériences aléatoires identiques,
 donc, si on note X_i la variable aléatoire qui donne le gain du $i^{\text{ème}}$ lancer, on a $E(X_i) = E(X_1) = 3,5$.
- On a alors :
 $E(G) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_{10})$
 $= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10})$ par linéarité de l'espérance
 $= 10 \times 3,5 = 35$
- ♦ $V(X_1) = \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (2 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (3 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (4 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (5 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2$
 $= 2,91666...$ $\rightarrow$ Pour ne pas avoir de problème avec l'arrondi final, je garde la valeur exacte à virgule.
- $V(G) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_{10})$
 $= V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_{10})$ car les 10 lancers représentent des expériences aléatoires indépendantes
 $= 10 \times 2,91666... = 29,1666...$
- et donc $\sigma(G) = \sqrt{V(G)} = \sqrt{29,1666...} \approx 5,40$.

- ⑧ 1. La loi de probabilité est :
- | | | |
|----------|-----|-----|
| k | 0 | 1 |
| $P(X=k)$ | 0,8 | 0,2 |
- On en déduit :
 $E(X) = 0,8 \times 0 + 0,2 \times 1 = 0,2$
 $V(X) = 0,8 \times (0 - 0,2)^2 + 0,2 \times (1 - 0,2)^2 = 0,16$.

2. *Attention à ne pas considérer que la répétition va multiplier X par 100 ...*
 Posons la variable aléatoire X_i qui compte le nombre de succès (il y en a 0 ou 1 !) de la $i^{\text{ème}}$ répétition de l'expérience de Bernoulli, pour $1 \leq i \leq 100$.
 Le nombre total de succès est alors mesuré par $X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$
- ♦ Chaque expérience est identique à l'expérience de la question 1. donc $E(X_i) = E(X) = 0,2$.
 et on a $E(X_1 + X_2 + \dots + X_{100}) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{100})$ par linéarité de l'espérance
 $= 100 E(X) = 100 \times 0,2 = 20$

- Chaque expérience est identique à l'expérience de la question 1. donc $V(X_i) = V(X) = 0,16$.
et on a $V(X_1 + X_2 + \dots + X_{100}) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_{100})$ car les expériences sont répétées de manière indépendante
 $= 100 V(X) = 100 \times 0,16 = 160$
3. On refait les deux questions précédentes en remplaçant 0,2 par p et 100 par n :
- $$E(X) = (1-p) \times 0 + p \times 1 = p$$
- $$V(X) = (1-p) \times (0-p)^2 + p \times (1-p)^2$$
- $$= (1-p)p^2 + p(1-p)^2$$
- $$= (1-p)(p^2 + p(1-p))$$
- $$= (1-p)(p^2 + p - p^2)$$
- $$= p(1-p)$$
- $$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \text{ par linéarité de l'espérance}$$
- $$= n E(X) = np.$$
- $$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) \text{ car les expériences sont répétées de manière indépendante}$$
- $$= n V(X) = np(1-p).$$

On retrouve l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

Ce qui n'est pas étonnant puisqu'on a répété une expérience de Bernoulli de manière indépendante...

- ⑨ 1. $E(M_1) = 0,04 \times 0 + 0,08 \times 1 + 0,12 \times 2 + 0,28 \times 3 + 0,25 \times 4 + 0,17 \times 5 + 0,06 \times 6 = 3,37$
2. Le passage de la variable M_1 mesurant le nombre de machines vendues à la variable R_1 mesurant le gain correspond à une multiplication par 5 000.
- $$E(R_1) = E(5\,000 M_1) = 5\,000 \times 3,37 = 16\,850$$
- Sur une longue période, on peut espérer en moyenne un résultat de 16 850 € chaque mois.
3. Le variable R_2 est définie implicitement...
- $$E(R_2) = 4 \times E(R_1) = 4 \times 16\,850 = 67\,400$$
- Le résultat mensuel total R_T est mesuré par $R_1 + R_2$. → Pour faciliter la rédaction, vous pouvez nommer une variable aléatoire.
- $$E(R_T) = E(R_1 + R_2) = E(R_1) + E(R_2) = 16\,850 + 67\,400 = 84\,250$$
- Donc, l'espérance du résultat mensuel total de l'entreprise est de 84 250 €.

- ⑩ 1. Le problème ressemble beaucoup au ⑦ mais attention, le passage du mensuel à l'annuel ne correspond pas à une multiplication par 12 !
C'est une répétition 12 fois de ce qui se passe en un mois.
La distinction n'est pas importante pour l'espérance mais elle est essentielle pour la variance (et donc l'écart type).
- $E(X) = 0,02 \times 0 + 0,08 \times 1 + 0,3 \times 2 + 0,25 \times 3 + 0,15 \times 4 + 0,12 \times 5 + 0,08 \times 6 = 3,11$
Donc, l'espérance du nombre mensuel d'appartements vendus est 3,11.
On répète l'expérience aléatoire chaque mois.
Donc, l'espérance du nombre annuel d'appartements vendus est :
$$E(X + X + \dots + X) = E(X) + E(X) + \dots + E(X) \text{ par linéarité de l'espérance}$$
$$= 12 E(X) = 12 \times 3,11 = 37,32.$$
 - $V(X) = 0,02 \times (0 - 3,11)^2 + 0,08 \times (1 - 3,11)^2 + 0,3 \times (2 - 3,11)^2 + 0,25 \times (3 - 3,11)^2 + 0,15 \times (4 - 3,11)^2 + 0,12 \times (5 - 3,11)^2 + 0,08 \times (6 - 3,11)^2$
$$= 2,1379$$

Donc, la variance du nombre mensuel d'appartements vendus est 2,1379.
On répète l'expérience aléatoire chaque mois et on a constaté que les ventes des mois successifs étaient indépendantes, donc, la variance du nombre annuel d'appartements vendus est :
$$V(X + X + \dots + X) = V(X) + V(X) + \dots + V(X)$$
$$= 12 \times 2,1379 = 25,6548.$$

On en déduit que l'écart type du nombre annuel d'appartements vendus est $\sqrt{25,6548} \approx 5,065$.
2. Le passage de la variable aléatoire mesurant le nombre annuel d'appartements à la variable aléatoire mesurant le gain est par contre bien une multiplication par 1 000.
- Puis, le passage à la variable aléatoire mesurant le bénéfice correspond à une soustraction de 15 000.
- L'espérance du bénéfice annuel de l'agence est $1\,000 \text{ €} \times 37,32 - 15\,000 \text{ €} = 12\,680 \text{ €}$.
 - L'écart type du bénéfice annuel de l'agence est $1\,000 \text{ €} \times 5,065 = 5\,065 \text{ €}$, arrondis à 1 € près.