Savoir DÉMONTRER ET UTILISER UNE DIVISIBILITÉ

Ce que je dois avoir compris

- On ne travaille qu'avec des entiers.
  On peut les additionner, soustraire et multiplier mais pas les diviser au risque de créer un quotient non entier.

- Un entier N est **divisible** par un entier d lorsque N peut s'écrire sous la forme kd avec $k \in \mathbb{Z}$.
  La précision " avec $k \in \mathbb{Z}$ " est essentielle ($5 = 2{,}5 \times 2$ mais 5 n'est pas divisible par 2).

  Remarque : d et k sont tous les deux des diviseurs de N, ainsi que $-k$ et $-d$.

  Remarque : 0 est divisible par tous les entiers mais 0 n'est diviseur d'aucun entier, sauf de lui-même.

  Remarque : 1 n'est divisible que par 1 et -1 mais il est diviseur de tous les entiers.

- Lorsque a et b ont même reste dans la division euclidienne par n, on dit qu'ils sont **égaux à un multiple de n près** ou encore qu'ils sont **congrus modulo n**, et on note $a \equiv b \ (n)$.

  En particulier, N est divisible par d se traduit par $N \equiv 0 \ (d)$.

Ce que je dois savoir faire

- **Démontrer qu'un entier d divise un entier N** [**sans les congruences** / **ou avec les congruences**]

  Méthode 1 : Appliquer la définition en démontrant que N s'écrit kd avec $k \in \mathbb{Z}$.

  Méthode 2 : Montrer que $N \equiv 0 \ (d)$.

  On remarquera qu'il y a souvent une divisibilité dans les données qu'il faut également traduire sous forme de produit ou de congruence.

Remarques sur les exercices

- Ils peuvent presque tous se faire avec les deux méthodes (mais pas tous !).
  La première est plus longue et demande une rédaction rigoureuse.
  La deuxième est bien plus rapide.

---

① Démontrer que si 20 divise un entier n, alors 20 divise aussi $3n^2 + 2n + 100$.

---

② Démontrer que $(10^{101} + 4)^4 - (10^{101} - 1)^4$ est divisible par 5.
Reconnaître une identité remarquable pour factoriser.

---

③ Montrer que $6^{1999} + 1$ est divisible par 7.

---

④ Démontrer que, pour tout entier n différent de -2, $2n^2 - n - 10$ est divisible par $n + 2$.
On sait factoriser un polynôme du second degré.

---

⑤ *a)* Soit un gros cube composé de 8 petits cubes unités sur chaque arête.
Si on enlève un petit cube unité, montrer qu'on peut ranger les petits cubes restants par paquets de 7.

b) Généraliser à un gros cube composé de n petits cubes unités sur chaque arête.
On pourra utiliser l'identité

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + ba^{m-2} + b^2a^{m-3} + b^3a^{m-4} + \ldots + b^{m-3}a^2 + b^{m-2}a + b^{m-1})$$

---

⑥ *a)* n étant un entier entre 1 et 9, les entiers $\overline{nnn}_{(10)}$ sont ceux qui s'écrivent avec trois chiffres identiques.
Montrer qu'ils sont tous divisibles par 37.

On pourrait faire une démonstration exhaustive en étudiant chacun des neuf cas 111, 222 jusqu'à 999, ce qui ne serait pas très long.
On attend une démonstration générale : la notation $\overline{c_n c_{n-1} \ldots c_2 c_1 c_0}_{(10)}$ est l'écriture en base 10 de l'entier
$c_n \times 10^n + c_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + c_2 \times 10^2 + c_1 \times 10^1 + c_0 \times 10^0$.

b) En déduire que $333^{777} - 777^{333}$ est divisible par 37.

---

⑦ Montrer que, pour tout n entier naturel, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11 .

---

⑧ Montrer qu'un entier à trois chiffres est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

On demande de démontrer une équivalence entre deux propositions (c'est ce que signifie si et seulement si *).*

Avec la première méthode, il faudra utiliser deux démonstrations :
- si un entier à trois chiffres est divisible par 3, alors la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- réciproquement, si un entier a sa somme de ses chiffres divisible par 3, alors il est divisible par 3.

Avec la seconde méthode, vous pourrez raisonner directement par équivalences.

On utilisera l'écriture à trois chiffres en base 10 sous la forme $\overline{abc}_{(10)} = a \times 100 + b \times 10 + c$.

---

⑨ Montrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est toujours divisible par 4 .

---

⑩ Montrer que, si n est impair, alors $n^2 - 1$ divisible par 8 .

---

⑪ Montrer que, si a et b sont deux entiers de même parité, alors $a^2 - b^2$ est divisible par 4.

*Envisager les deux parités possibles (on parle de **disjonction exhaustive des cas**).*

---

⑫ *a)* Justifier que tout entier naturel n s'écrit sous l'une des formes $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$ avec k entier.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , 3 divise $n(2n^2 + 1)$.

Utiliser la disjonction exhaustive des cas proposée au a).

---

⑬ Montrer que, pour tout n entier naturel, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6 .

Utiliser une disjonction exhaustive des cas. L'énoncé vous incite à choisir les différentes formes de n .

---

⑭ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $4^n - 1$ est un multiple de 3 .

---

⑮ Démontrer par récurrence que la propriété $P(n)$: « $4^n + 1$ est un multiple de 3 » est héréditaire mais pas initialisable.

Exemple qui montre bien l'importance de l'initialisation dans une démonstration par récurrence...
Pour prouver que la propriété n'est pas initialisable, utiliser le résultat du ⑪.

---

⑯ Montrer que, pour tout n entier naturel, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6 .

---

⑰ On veut déterminer tous les entiers n tels que $n - 3$ divise $n + 5$.

a) Étant donné un entier n , supposons que $n - 3$ divise $n + 5$.
Montrer que $n - 3$ divise nécessairement 8 .
En déduire que n est parmi un ensemble de huit valeurs.

b) Parmi ces huit valeurs, quelles sont celles qui sont telles que $n - 3$ divise $n + 5$.

---

⑱ Déterminer tous les entiers n tels que $n + 1$ divise $3n - 2$.

---

⑲ Déterminer tous les entiers n tels que $4n + 11$ divise $n + 1$.

⑳ *a)* Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x + 6 \equiv 5 \ (3)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x + 1 \equiv 6 \ (4)$.

Attention, pas question de diviser !
Procéder par disjonction des cas.

c) Résoudre dans $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 20 \}$ l'équation $2x^2 + 7x - 3 \equiv 6 \ (5)$.