

Correction de FONCTIONS - Fiche 4

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤

- ① 1. Ce n'est pas un calcul de primitive puisqu'on vous donne la primitive candidate et qu'il suffit de vérifier qu'elle l'est.
En plus, nous ne pourrions pas trouver une primitive grâce à nos fonctions et formes usuelles...
Il suffit de dériver g et trouver $\ln$:

$$g \text{ est de la forme } uv - u \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

donc g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g' = u'v + uv' - u'$

donc, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

Donc g est bien une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

2. Dérivons F pour trouver f .

F est de la forme $-\frac{3}{2} \ln(u)$ avec $u(x) = 1 + e^{-2x}$ et $u'(x) = -2e^{-2x}$

donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = -\frac{3}{2} \frac{u'}{u}$.

donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{3}{2} \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\ &= \frac{3e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \end{aligned}$$

Il n'est pas évident d'y voir $f(x)$...

N'oubliez pas que pour démontrer que deux choses sont égales, on peut partir de l'une pour arriver à l'autre mais on peut aussi partir des deux pour arriver à la même chose.

$$\begin{aligned} \text{Or, } f(x) &= 3 - \frac{3}{1 + e^{-2x}} \\ &= \frac{3(1 + e^{-2x})}{1 + e^{-2x}} - \frac{3}{1 + e^{-2x}} \\ &= \frac{3 + 3e^{-2x} - 3}{1 + e^{-2x}} \\ &= \frac{3e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\ &= F'(x) \end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Avec de l'astuce, on pouvait néanmoins continuer le calcul et arriver à $f(x)$:

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{3e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\ &= \frac{3e^{-2x} + 3 - 3}{1 + e^{-2x}} \quad \text{astuce !} \\ &= \frac{3(1 + e^{-2x})}{1 + e^{-2x}} - \frac{3}{1 + e^{-2x}} \\ &= 3 - \frac{3}{1 + e^{-2x}} = f(x) \end{aligned}$$

- ② 1. On a une simple somme d'expressions usuelles avec des constantes multiplicatives qui sont conservées.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto -3 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^2}{2} - 2x = -x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x$.

→ Pensez à arranger votre expression si c'est possible.

2. De même ici :

Une primitive de g sur $]0; +\infty[$ est $x \mapsto e^x + \ln x$

donc les primitives de g sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions $G_k : x \mapsto e^x + \ln x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

3. a. Une primitive de h sur $]0; +\infty[$ est $H : x \mapsto 2 \ln x$.

- b. Nous n'avons plus une expression usuelle.
Cherchons une forme usuelle.

h est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x - 1$ strictement positif sur $]1; +\infty[$ et $u'(x) = 1$, → Signaler la positivité pour entrer dans $\ln$.
donc, une primitive de h sur $]1; +\infty[$ est $H = \ln(u) : x \mapsto \ln(x - 1)$.

- c. Non, ce n'est pas deux fois la même question !

h est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x - 1$ strictement négatif sur $] -\infty; 1[$ et $u'(x) = 1$, → Signaler la négativité...
donc, une primitive de h sur $] -\infty; 1[$ est $H = \ln(-u) : x \mapsto \ln(1 - x)$. → ... pour que $-u$ soit positif.

- d. On n'est pas loin de la forme usuelle $\frac{u'}{u}$ mais il manque $u'(x) = 2$ en numérateur.

Faisons sa présence en compensant :

$$\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2} \frac{2}{2x+1}$$

h est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x+1$ strictement positif sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de h sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ est $H = \frac{1}{2} \ln(u) : x \mapsto \frac{1}{2} \ln(2x+1)$.

→ Ne pas oublier votre constante multiplicative.

- e. Oh, comme c'est gentil ne nous mettre le 2 ... Oui mais il manque quand même un petit quelque chose...

$$\frac{2}{1-2x} = -\frac{-2}{1-2x}$$

h est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1-2x$ strictement positif sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ et $u'(x) = -2$,

donc, une primitive de h sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$ est $H = -\ln(u) : x \mapsto -\ln(1-2x)$.

- f. Oh ben là, on nous a mis un 3 qui ne nous convient pas.

On va le pousser sur le côté mais ne pas l'oublier !

$$\frac{3}{2x+1} = 3 \times \frac{1}{2} \frac{2}{2x+1}$$

h est de la forme $\frac{3}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x+1$ strictement positif sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de h sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ est $H = \frac{3}{2} \ln(u) : x \mapsto \frac{3}{2} \ln(2x+1)$.

- g. Même problème que dans le e. mais on a changé de forme ! On n'est pas loin de la forme usuelle $\frac{u'}{u^2}$.

$$\frac{3}{(2x+1)^2} = 3 \times \frac{1}{2} \frac{2}{(2x+1)^2}$$

h est de la forme $\frac{3}{2} \frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 2x+1$ et $u'(x) = 2$,

→ Plus besoin de la positivité.

donc, une primitive de h sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ est $H = \frac{3}{2} \frac{-1}{u} : x \mapsto \frac{3}{2} \frac{-1}{2x+1} = \frac{-3}{2(2x+1)}$.

- h. On est passé à la forme usuelle $\frac{u'}{u^3}$.

$$\frac{3}{(2x+1)^3} = 3 \times \frac{1}{2} \frac{2}{(2x+1)^3}$$

h est de la forme $\frac{3}{2} \frac{u'}{u^3}$ avec $u(x) = 2x+1$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de h sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ est $H = \frac{3}{2} \frac{1}{-2} \frac{1}{u^2} : x \mapsto \frac{3}{2} \frac{1}{-2} \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{-3}{4(2x+1)^2}$.

Si vous n'êtes pas à l'aise avec la formule $\frac{1}{-n+1} \frac{1}{u^{n-1}}$, vous pouvez écrire $\frac{u'}{u^3}$ sous la forme $u' u^{-3}$ et utiliser la formule $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

Une primitive de $u' u^{-3}$ est en effet $\frac{u^{-3+1}}{-3+1}$ qui devient bien $\frac{1}{-2} \frac{1}{u^2}$.

- i. Attention au carré ! Ce n'est pas la forme $\frac{u'}{u^2}$.

C'est de nouveau $\frac{u'}{u}$ mais on a changé de u !

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1}$$

h est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+1$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H = \ln(u) : x \mapsto \ln(x^2+1)$.

- j. C'est encore du $\frac{u'}{u}$.

Mais alors, quel est le problème ?

x^2+x+1 a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$

donc il est du signe constant de son coefficient dominant 1 positif.

h est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+x+1$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x+1$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $H = \ln(u) : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$.

4. Une première difficulté sera de gérer la constante additive.

Attention ! Elle ne disparaît pas...

$$\frac{1}{2-3x} = -\frac{1}{3} \frac{-3}{2-3x}$$

φ est de la forme $1 - \frac{1}{3} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2 - 3x$ positif sur $] -\infty ; \frac{2}{3} [$ et $u'(x) = -3$,

donc, une primitive de φ sur $] -\infty ; \frac{2}{3} [$ est $x \mapsto x - \frac{1}{3} \ln(2 - 3x)$

→ On peut alléger en n'écrivant pas la forme générale.

donc, F est de la forme des primitives de φ sur $] -\infty ; \frac{2}{3} [$ qui sont les $x \mapsto x - \frac{1}{3} \ln(2 - 3x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Il faut maintenant trouver la constante k pour vérifier la condition :

Alors :

$$F(-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 - \frac{1}{3} \ln(2 - 3 \times (-2)) + k = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 2 + \frac{1}{3} \ln 8$$

$$\Leftrightarrow k = 2 + \ln 2$$

On en déduit que F est la fonction définie par $F(x) = x - \frac{1}{3} \ln(2 - 3x) + 2 + \ln 2$.

Car :

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{3} \ln 8 &= 2 + \frac{1}{3} \ln 2^3 \\ &= 2 + \frac{1}{3} \times 3 \ln 2 \\ &= 2 + \ln 2 \end{aligned}$$

5. a. $\frac{1}{\sqrt{6x-3}} = \frac{1}{6} \frac{6}{\sqrt{6x-3}}$

f est de la forme $\frac{1}{6} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 6x - 3$ et $u'(x) = 6$,

donc, une primitive de f sur $] 2 ; +\infty [$ est $F = \frac{1}{6} 2 \sqrt{u} : x \mapsto \frac{1}{6} \times 2 \sqrt{6x-3} = \frac{\sqrt{6x-3}}{3}$.

b. f est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x - 3$ et $u'(x) = 1$,

donc, une primitive de f sur $] 3 ; +\infty [$ est $F = 2 \sqrt{u} : x \mapsto 2 \sqrt{x-3}$.

c. $\frac{2}{\sqrt{3-6x}} = 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \frac{-6}{\sqrt{6x-3}}$

f est de la forme $-\frac{1}{3} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 3 - 6x$ et $u'(x) = -6$,

donc, une primitive de f sur $] -\infty ; 2 [$ est $F = -\frac{1}{3} \times 2 \sqrt{u} : x \mapsto -\frac{1}{3} \times 2 \sqrt{3-6x} = \frac{-2\sqrt{3-6x}}{3}$.

d. $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$

f est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{u} : x \mapsto \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$.

6. a. $(2x-5)^5 = \frac{1}{2} \times 2 (2x-5)^5$

g est de la forme $\frac{1}{2} u' u^5$ avec $u(x) = 2x - 5$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G = \frac{1}{2} \frac{u^6}{6} : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{(2x-5)^6}{6} = \frac{(2x-5)^6}{12}$.

b. $7(2x-5)^7 = 7 \times \frac{1}{2} \times 2 (2x-5)^7$

g est de la forme $\frac{7}{2} u' u^7$ avec $u(x) = 2x - 5$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G = \frac{7}{2} \frac{u^8}{8} : x \mapsto \frac{7}{2} \frac{(2x-5)^8}{8} = \frac{7(2x-5)^8}{16}$.

c. $x(x^2+1)^4 = \frac{1}{2} \times 2x (x^2+1)^4$

g est de la forme $\frac{1}{2} u' u^4$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$,

donc, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G = \frac{1}{2} \frac{u^5}{5} : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^5}{5} = \frac{(x^2+1)^5}{10}$.

d. $(x+1)(x^2+2x-5)^9 = \frac{1}{2} (2x+2)(x^2+2x-5)^9$

g est de la forme $\frac{1}{2} u' u^9$ avec $u(x) = x^2 + 2x - 5$ et $u'(x) = 2x + 2$,

donc, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G = \frac{1}{2} \frac{u^{10}}{10} : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{(x^2+2x-5)^{10}}{10} = \frac{(x^2+2x-5)^{10}}{20}$.

7. ψ est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}} + u' u^3$ avec $u(x) = x+1$ et $u'(x) = 1$,

donc, une primitive de ψ sur $]1; +\infty[$ est $2\sqrt{u} + \frac{u^4}{4} : x \mapsto 2\sqrt{x+1} + \frac{(x+1)^4}{4}$

donc, G est de la forme des primitives de ψ sur $]1; +\infty[$ qui sont les $x \mapsto 2\sqrt{x+1} + \frac{(x+1)^4}{4} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Trouver la constante k :

Alors :

$$G(0) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{0+1} + \frac{(0+1)^4}{4} + k = 2$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

On en déduit que G est la fonction définie par $G(x) = 2\sqrt{x+1} + \frac{(x+1)^4}{4} - \frac{1}{4}$.

8. a. $e^{3x+1} = \frac{1}{3} \times 3 e^{3x+1}$

f est de la forme $\frac{1}{3} u' e^u$ avec $u(x) = 3x+1$ et $u'(x) = 3$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = \frac{1}{3} e^u : x \mapsto \frac{1}{3} e^{3x+1}$.

- b. $e^{2-x} = -(-e^{2-x})$

f est de la forme $-u' e^u$ avec $u(x) = 2-x$ et $u'(x) = -1$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = -e^u : x \mapsto -e^{2-x}$.

- c. $2e^{1-2x} = -(-2e^{1-2x})$

f est de la forme $-u' e^u$ avec $u(x) = 1-2x$ et $u'(x) = -2$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = -e^u : x \mapsto e^{1-2x}$.

- d. $\frac{2}{e^x} = 2e^{-x} = -2(-e^{-x})$

f est de la forme $-2u' e^u$ avec $u(x) = -x$ et $u'(x) = -1$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = -2e^u : x \mapsto -2e^{-x} = \frac{-2}{e^x}$.

- e. $x e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2}$

f est de la forme $\frac{1}{2} u' e^u$ avec $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$,

donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = \frac{1}{2} e^u : x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2}$.

9. a. $1 - e^{2x-1} = 1 - \frac{1}{2} \times 2 e^{2x-1}$

v est de la forme $1 - \frac{1}{2} u' e^u$ avec $u(x) = 2x-1$ et $u'(x) = 2$,

donc, une primitive de v sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto x - \frac{1}{2} e^{2x-1}$

donc, les primitives de v sur $\mathbb{R}$ sont les $x \mapsto x - \frac{1}{2} e^{2x-1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

- b. La représentation graphique passe par le point $A(1; 1)$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} e^{2 \times 1 - 1} + k = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{e}{2}$$

On en déduit que la primitive de v dont la représentation graphique passe par $A(1; 1)$ est $x \mapsto x - \frac{1}{2} e^{2x-1} + \frac{e}{2}$.

10. a. *Une première méthode serait de développer : $(e^x - 1)e^x = e^{2x} - e^x$ et on a deux expressions qu'on saura gérer facilement. Mais montrons une seconde méthode qui servira pour les exemples suivants...*

h est de la forme $u' u$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\frac{u^2}{2} : x \mapsto \frac{(e^x + 1)^2}{2}$.

- b. h est de la forme $u' u^2$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\frac{u^3}{3} : x \mapsto \frac{(e^x + 1)^3}{3}$.

- c. h est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 1$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x$,

donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\ln u : x \mapsto \ln(e^x + 1)$.

$\rightarrow$ Attention, on ne peut pas utiliser $\ln e^x = x$ à cause du $+1$.

- d. h est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = e^x + 1$ et $u'(x) = e^x$,
donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\frac{-1}{u} : x \mapsto -\frac{1}{e^x + 1}$.
- e. $e^{-x} (e^{-x} + 1) = -(-e^{-x})(e^{-x} + 1)$
 h est de la forme $-u' u$ avec $u(x) = e^{-x} + 1$ et $u'(x) = -e^{-x}$,
donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\frac{u^2}{2} : x \mapsto \frac{(e^{-x} + 1)^2}{2}$.
- f. $\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = -\frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1}$
 h est de la forme $-\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{-x} + 1$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -e^{-x}$,
donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\ln u : x \mapsto \ln(e^{-x} + 1)$.
- g. $e^{2x} (e^{2x} - 2) = \frac{1}{2} \times 2 e^{2x} (e^{2x} - 2)$
 h est de la forme $\frac{1}{2} u' u$ avec $u(x) = e^{2x} - 2$ et $u'(x) = 2e^{2x}$,
donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{2} \frac{u^2}{2} : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{(e^{2x} - 2)^2}{2}$.
- h. $\frac{x e^{x^2}}{e^{x^2} + 2} = \frac{1}{2} \frac{2x e^{x^2}}{e^{x^2} + 2}$
 h est de la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{x^2} + 2$ strictement positif sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x e^{x^2}$,
donc, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est $\ln u : x \mapsto \ln(e^{x^2} + 2)$.

11. Deux grands classiques...

- a. La première expression est très simple à condition d'avoir l'idée de séparer la fraction :
 $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x$
 p est de la forme $u' u$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$,
donc, une primitive de p sur $]0; +\infty[$ est $\frac{u^2}{2} : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$.
- b. La seconde s'appuie sur la même astuce :
 $\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$
 q est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$ strictement positif sur $]1; +\infty[$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$,
donc, une primitive de q sur $]1; +\infty[$ est $\ln u : x \mapsto \ln(\ln x)$.

③ 1. On se ramène à la forme $y' = ay$ la plus simple que nous savons résoudre.

$$y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto C e^{-2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. On se ramène à la forme $y' = ay + b$, la deuxième forme que nous savons résoudre.

$$y' + 2y = 5 \Leftrightarrow y' = -2y + 5$$

$$\bullet \quad 0 = -2k + 5 \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}$$

donc, la solution particulière constante est $x \mapsto \frac{5}{2}$.

$$\bullet \quad \text{On en déduit que les solutions sont les fonctions } x \mapsto C e^{-2x} + \frac{5}{2} \text{ définies sur } \mathbb{R}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

3. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ G'(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } G'(x) + 2G(x) &= \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

donc G est une solution particulière de $(E) : y' + 2y = x$.

- b. On se ramène à la troisième forme $y' = ay + f$ que nous savons résoudre.

$$y' + 2y = x \Leftrightarrow y' = -2y + x$$

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto C e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

4. a. f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \text{ et } v'(x) = e^x \end{cases}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$

$$\begin{aligned} \text{donc } f'(x) &= 1 \times e^x + x e^x \\ &= e^x + x e^x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x) = x e^x \\ f'(x) = e^x + x e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } f'(x) - f(x) &= e^x + x e^x - x e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

donc f est une solution particulière de $(\mathcal{E}) : y' - y = e^x$.

- b. $y' - y = e^x \Leftrightarrow y' = y + e^x$

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions $x \mapsto C e^x + x e^x$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

- c. $h(1) = 1$

$$\Leftrightarrow C e^1 + 1 e^1 = 1$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1-e}{e}$$

Donc $h : x \mapsto \frac{1-e}{e} e^x + x e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

- ④ 1. Pour vérifier l'équation différentielle, il me faut d'abord la dérivée :

u est de la forme vw avec $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{2x} \text{ et } v'(x) = 2 e^{2x} \end{cases}$

donc u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u' = v'w + vw'$

$$\begin{aligned} \text{donc } u'(x) &= 1 \times e^{2x} + x \times 2 e^{2x} \\ &= (1 + 2x) e^{2x} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} u'(x) - 2 u(x) &= (1 + 2x) e^{2x} - 2 x e^{2x} \\ &= e^{2x} \end{aligned}$$

donc u est une solution particulière de (E).

2. Application du cours :

$$y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$$

Donc, les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto C e^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Version en deux implications réciproques :

- Supposons v solution de (E).

Alors :

$$\begin{aligned} (v-u)' - 2(v-u) &= v' - u' - 2v + 2u \\ &= (v' - 2v) - (u' - 2u) \\ &= e^{2x} - e^{2x} \text{ car } v \text{ solution de (E) et d'après 1.} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $v-u$ solution de (E_0) .

- Réciproquement, supposons $v-u$ solution de (E_0) .

$$\begin{aligned} \text{Alors } (v-u)' - 2(v-u) &= 0 \\ \text{et donc } (v' - 2v) - (u' - 2u) &= 0 \\ \text{donc } v' - 2v &= u' - 2u \\ &= e^{2x} \text{ d'après 1.} \end{aligned}$$

Donc v solution de (E).

4. v solution de (E)

$$\Leftrightarrow v-u \text{ solution de } (E_0) \text{ d'après 3.}$$

$$\Leftrightarrow v-u \text{ de la forme } x \mapsto C e^{2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ d'après 2.}$$

$$\Leftrightarrow v \text{ de la forme } x \mapsto C e^{2x} + u(x) = C e^{2x} + x e^{2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Donc, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto C e^{2x} + x e^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

5. $C e^{2 \times 0} + 0 e^{2 \times 0} = 1$

$$\Leftrightarrow C = 1$$

Donc, la fonction est $x \mapsto e^{2x} + x e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ On peut factoriser sous la forme $(1+x) e^{2x}$.

Voici la version rapide par succession d'équivalences :

$$\begin{aligned} &v \text{ solution de (E)} \\ \Leftrightarrow &v' - 2v = e^{2x} \\ \Leftrightarrow &v' - 2v = u' - 2u \text{ d'après 1.} \\ \Leftrightarrow &v' - 2v - u' + 2u = 0 \\ \Leftrightarrow &(v-u)' - 2(v-u) = 0 \\ \Leftrightarrow &v-u \text{ solution de } (E_0). \end{aligned}$$

⑤ 1. $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$

Donc, les solutions de (E_1) sont les fonctions $x \mapsto C e^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

2. a. ♦ f est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = ax + b \text{ et } u'(x) = a \\ v(x) = e^x \text{ et } v'(x) = e^x \end{cases}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$

$$\begin{aligned} \text{donc } f'(x) &= a e^x + (ax + b) e^x \\ &= (ax + b + a) e^x \end{aligned}$$

♦ f solution de (E_2)

$$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = x e^x$$

$$\Leftrightarrow (ax + b + a) e^x - 2(ax + b) e^x = x e^x$$

$$\Leftrightarrow (ax + b + a - 2ax - 2b) e^x = x e^x$$

$$\Leftrightarrow (-ax - b + a) e^x = x e^x$$

$$\Leftrightarrow -ax - b + a = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ -b + a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

b. *Proposons la version rapide par équivalences :*

$f + g$ solution de (E_2)

$$\Leftrightarrow (f + g)' - 2(f + g) = x e^x$$

$$\Leftrightarrow f' + g' - 2f - 2g = x e^x$$

$$\Leftrightarrow (f' - 2f) + g' - 2g = x e^x$$

$$\Leftrightarrow x e^x + g' - 2g = x e^x \text{ d'après 2. a.}$$

$$\Leftrightarrow g' - 2g = 0$$

$$\Leftrightarrow g \text{ solution de } (E_1).$$

c. h solution de (E_2)

$$\Leftrightarrow (h - f) + f \text{ solution de } (E_2)$$

$$\Leftrightarrow h - f \text{ solution de } (E_1) \text{ d'après 2. b.}$$

$$\Leftrightarrow h - f \text{ de la forme } x \mapsto C e^{2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ d'après 1.}$$

$$\Leftrightarrow h \text{ de la forme } x \mapsto C e^{2x} + f(x) = C e^{2x} + (-x - 1) e^{2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Donc, l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto C e^{2x} + (-x - 1) e^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. $C e^{2 \times 0} + (-0 - 1) e^{2 \times 0} = 0$

$$\Leftrightarrow C - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow C = 1$$

Donc, la fonction est $x \mapsto e^{2x} + (-x - 1) e^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

→ La factorisation simplifie l'expression en $-x e^{2x}$.