Correction de **COMPLEXES - Fiche 1**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑

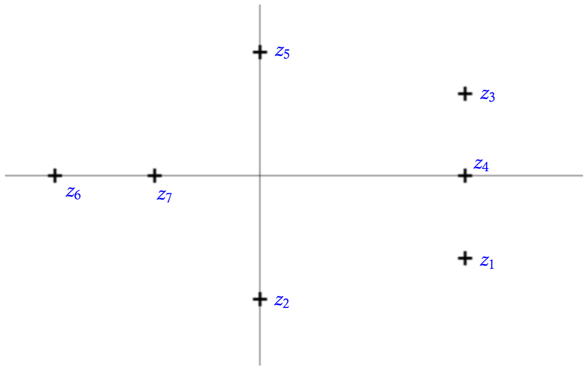
①

z_2 a une partie imaginaire négative donc M_2 est sous l'axe des abscisses.
z_2 et z_5 sont opposés donc M_2 et M_5 sont symétriques par rapport à l'origine.
On peut donc placer M_2 car un seul des deux points à un symétrique.
Et on en déduit M_5 .

z_4 et z_6 sont opposés,
donc M_4 et M_6 sont les deux seuls points symétriques restants (sur l'axe des abscisses).
Comme $\mathbf{Re}(z_4) > \mathbf{Re}(z_1)$, M_4 ne peut être à gauche. On peut donc le placer à droite.
Puis placer M_6 .

$z_7 = \overline{z_7}$ donc il est égal à son conjugué
donc M_7 est son propre symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On peut le placer.

z_1 et z_3 sont conjugués
donc M_1 et M_3 sont les deux points restants, symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Comme $\mathbf{Im}(z_4) > \mathbf{Im}(z_1)$, M_4 est plus haut que M_1 . On peut donc placer M_1 . puis M_3 .



②

- $z_1 = \mathrm{i}^{2022}$
  $= \mathrm{i}^{4\times505+2}$
  $= (\mathrm{i}^4)^{505}\times\mathrm{i}^2$
  $= 1^{505}\times(-1)$
  $= -1$

- $z_2 = \mathrm{i}^{1301}$
  $= \mathrm{i}^{4\times325+1}$
  $= (\mathrm{i}^4)^{325}\times\mathrm{i}^1$
  $= \mathrm{i}$

- $z_3 = (-\mathrm{i})^{3108}$
  $= (-1)^{3108}\times\mathrm{i}^{3108}$
  $= 1\times\mathrm{i}^{4\times777}$
  $= (\mathrm{i}^4)^{777}$
  $= 1$

- $z_4 = (2\mathrm{i})^{11}$
  $= 2^{11}\times\mathrm{i}^{11}$
  $= 2\,048\times\mathrm{i}^{4\times2+3}$
  $= 2\,048\times\mathrm{i}^3$
  $= -2\,048\,\mathrm{i}$

- $z_5 = \dfrac{1}{\mathrm{i}^{891}}$.
  $= \mathrm{i}^{-891}$
  $= \mathrm{i}^{4\times(-222)+3}$
  $= \mathrm{i}^3$
  $= -\mathrm{i}$

③

- $z_1 + z_2 = (1-5\mathrm{i}) + (2+3\mathrm{i}) = 3-2\mathrm{i}$ → Je regroupe les parties réelles 1 et 2 et les parties imaginaires $-5\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.

- $z_1 - z_2 = (1-5\mathrm{i}) - (2+3\mathrm{i}) = 1-5\mathrm{i}-2-3\mathrm{i} = -1-8\mathrm{i}$

- $z_1 z_2 = (1-5\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})$ → Je développe.
  $= 2+3\mathrm{i}-10\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2$ → Je repère i^2 qui va devenir -1 .
  $= 2-7\mathrm{i}+15$
  $= 17-7\mathrm{i}$

- $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{1-5\mathrm{i}}$
  $= \dfrac{1(1+5\mathrm{i})}{(1-5\mathrm{i})(1+5\mathrm{i})}$ → Je multiplie en haut et en bas par le conjugué $1+5\mathrm{i}$ du dénominateur $1-5\mathrm{i}$.
  $= \dfrac{1+5\mathrm{i}}{1^2+5^2}$ → Au dénominateur, j'applique la nouvelle identité remarquable $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2$.
  $= \dfrac{1}{26} + \dfrac{5}{26}\mathrm{i}$

- $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{2+3i}$

$= \dfrac{1\,(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$ → Même technique de multiplier en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

$= \dfrac{2-3i}{2^2+3^2}$

$= \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1-5i}{2+3i}$

$= \dfrac{(1-5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$ → Même technique de multiplier en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

$= \dfrac{2-3i-10i+15i^2}{2^2+3^2}$

$= \dfrac{-13-13i}{13}$

$= -1-i$

- $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{2+3i}{1-5i}$

$= \dfrac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)}$

$= \dfrac{2+10i+3i+15i^2}{1^2+5^2}$

$= -\dfrac{13}{26} + \dfrac{13}{26}i$

$= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Ou, avec le calcul précédent :

$\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1}{-1-i}$

$= \dfrac{-1+i}{(-1-i)(-1+i)}$

$= \dfrac{-1+i}{(-1)^2+1^2}$

$= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

- $\dfrac{z_2}{3i} = \dfrac{2+3i}{3i}$

$= \dfrac{(2+3i)\,i}{3i^2}$

$= \dfrac{2i+3i^2}{-3}$

$= \dfrac{-3+2i}{-3}$

$= 1 - \dfrac{2}{3}i$

- $z_2^2 = (2+3i)^2$

$= 2^2 + 2\times2\times3i + (3i)^2$

$= 1 + 12i + 3^2\,i^2$

$= 1 + 12i - 9$

$= -8 + 12i$

- $z_1^3 = (1-5i)^3$

$= 1^3 + 3\times1^2\times(-5i) + 3\times1\times(-5i)^2 + (-5i)^3$ → J'applique l'utile identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$= 1 - 15i + 3\times25i^2 - 125i^3$ → Attention, i^2 va devenir -1 mais i^3 va devenir $-i$.

$= 1 - 15i - 75 + 125i$

$= -74 + 110i$

---

④ • Méthode 1 : en utilisant deux fois l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$z_1 = (3+i)^5$

$= \left((3+i)^2\right)^2(3+i)$

$= (9+6i-1)^2(3+i)$

$= (8+6i)^2(3+i)$

$= (64+96i-36)(3+i)$

$= (28+96i)(3+i)$

$= 84 + 28i + 288i - 96$

$= -12 + 316i$

Méthode 2 : en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$z_1 = (3+i)^5$

$= (3+i)^3(3+i)^2$

$= (27+27i-9-i)(9+6i-1)$

$= (18+26i)(8+6i)$

$= 144 + 108i + 208i - 156$

$= -12 + 316i$

Méthode 3 : en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ dont les coefficients s'obtiennent avec le triangle de Pascal

1					
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$$\begin{aligned} z_1 &= (3+\mathrm{i})^5 \\ &= 3^5 + 5\times3^4\,\mathrm{i} + 10\times3^3\times\mathrm{i}^2 + 10\times3^2\times\mathrm{i}^3 + 5\times3\times\mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5 \\ &= 243 + 405\,\mathrm{i} - 270 - 90\,\mathrm{i} + 15 + \mathrm{i} \\ &= -12 + 316\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

- Correction non détaillée : $z_2 = 8\,\mathrm{i}$
- Correction non détaillée : $z_3 = -527 + 336\,\mathrm{i}$

⑤
$$\begin{aligned} P(\mathrm{i}\sqrt{2}) &= (\mathrm{i}\sqrt{2})^3 - (2+\mathrm{i}\sqrt{2})(\mathrm{i}\sqrt{2})^2 + 2(1+\mathrm{i}\sqrt{2})\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ &= \mathrm{i}^3(\sqrt{2})^3 - (2+\mathrm{i}\sqrt{2})\,\mathrm{i}^2(\sqrt{2})^2 + (2+\mathrm{i}\,2\sqrt{2})\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ &= -\mathrm{i}\,2\sqrt{2} + (2+\mathrm{i}\sqrt{2})\times2 + \mathrm{i}\,2\sqrt{2} + \mathrm{i}^2\,2\times2 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ &= -\mathrm{i}\,2\sqrt{2} + 4 + \mathrm{i}\,2\sqrt{2} + \mathrm{i}\,2\sqrt{2} - 4 - 2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\mathrm{i}\sqrt{2}$ est une racine de P.

⑥ **a.**

```
for n in range(101) :
    z = complex(3*n,1)*complex(-75,n)
        if z.imag==0 :
            print(n)
```

La seule valeur affichée est 5.

b.
$$\begin{aligned} (3n+\mathrm{i})(-75+\mathrm{i}\,n) &= -225n + \mathrm{i}\,3n^2 - 75\mathrm{i} - n \\ &= -226n + \mathrm{i}\,(3n^2 - 75) \end{aligned}$$

Donc, $(3n+\mathrm{i})(-75+\mathrm{i}\,n)$ réel $\Leftrightarrow 3n^2 - 75 = 0$
$\Leftrightarrow n^2 = 25$
$\Leftrightarrow n = 5$ ou $n = -5$

Les valeurs sont 5 et –5 .

⑦ 1ère méthode : on calcule sous forme algébrique puis on conjugue

- $z_1 = \dfrac{1}{5-2\mathrm{i}}$
$$= \frac{5+2\mathrm{i}}{(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})} = \frac{5+2\mathrm{i}}{25+4} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}\mathrm{i}$$
donc $\overline{z_1} = \dfrac{5}{29} - \dfrac{2}{29}\mathrm{i}$.

- $z_2 = (1+3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$
$$= 2 - \mathrm{i} + 6\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = 5 + 5\mathrm{i}$$
donc $\overline{z_2} = 5 - 5\mathrm{i}$.

- $z_3 = \dfrac{1+5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$
$$= \frac{(1+5\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{2+\mathrm{i}+10\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2^2+1^2} = \frac{1}{5} + \frac{11}{5}\mathrm{i}$$
donc $\overline{z_3} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{11}{5}\mathrm{i}$.

2ème méthode : on conjugue puis on calcule

- $\overline{z_1} = \overline{\left(\dfrac{1}{5-2\mathrm{i}}\right)}$
$$= \frac{\overline{1}}{\overline{5-2\mathrm{i}}} \qquad \to \text{Formule } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$
$$= \frac{1}{5+2\mathrm{i}}$$

$= \dfrac{5-2\text{i}}{(5+2\text{i})(5-2\text{i})}$

$= \dfrac{5}{29} - \dfrac{2}{29}\text{i}$

- $\overline{z_2} = \overline{(1+3\text{i})(2-\text{i})}$

$= \overline{(1+3\text{i})}\ \overline{(2-\text{i})}$ $\rightarrow$ Formule $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

$= (1-3\text{i})(2+\text{i})$

$= 2+\text{i}-6\text{i}-3\text{i}^2$

$= 5-5\text{i}$

- $\overline{z_3} = \overline{\dfrac{1+5\text{i}}{2-\text{i}}}$

$= \dfrac{\overline{1+5\text{i}}}{\overline{2-\text{i}}}$

$= \dfrac{1-5\text{i}}{2+\text{i}}$

$= \dfrac{(1-5\text{i})(2-\text{i})}{(2+\text{i})(2-\text{i})}$

$= \dfrac{2-\text{i}-10\text{i}+\text{i}^2}{2^2+1^2}$

$= \dfrac{1}{5} - \dfrac{11}{5}\text{i}$

---

⑧ **1.** $Z = 2\text{i}(\overline{z} - z)$

donc $\overline{Z} = \overline{2\text{i}(\overline{z} - z)}$

$= \overline{2\text{i}}\ \overline{(\overline{z} - z)}$ $\rightarrow$ Formule $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

$= \overline{2\text{i}}\ (\overline{\overline{z}} - \overline{z})$ $\rightarrow$ Formule $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

$= -2\text{i}(z - \overline{z})$ $\rightarrow$ Formule $\overline{\overline{z}} = z$.

$= 2\text{i}(-z + \overline{z})$ $\rightarrow$ Je distribue le $-$.

$= 2\text{i}(\overline{z} - z)$

$= Z$

On en déduit que Z est réel.

> On peut voir que Z est réel en utilisant la forme algébrique de z (mais ça ne répond pas à la consigne) :
>
> Posons $z = x + \text{i}y$ avec x et y réels.
>
> Alors : $Z = 2\text{i}(\overline{z} - z)$
>
> $= 2\text{i}(x - \text{i}y - x - \text{i}y)$
>
> $= 2\text{i}(-2\text{i}y)$
>
> $= 4y$ qui est bien réel

2. $Z = \text{i}(z - \overline{z})$

donc $\overline{Z} = \overline{\text{i}(z - \overline{z})}$

$= \overline{\text{i}}\ \overline{(z - \overline{z})}$

$= -\text{i}\ (\overline{z} - \overline{\overline{z}})$

$= -\text{i}\ (\overline{z} - z)$

$= \text{i}(-\overline{z} + z)$

$= \text{i}(z - \overline{z})$

$= Z$

On en déduit que Z est réel.

3. $Z = \dfrac{\text{i}}{z + \overline{z}}$

donc $\overline{Z} = \overline{\dfrac{\text{i}}{z + \overline{z}}}$

$= \dfrac{\overline{\text{i}}}{\overline{z + \overline{z}}}$ $\rightarrow$ Formule $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

$= \dfrac{-\text{i}}{\overline{z} + \overline{\overline{z}}}$

$= \dfrac{-\text{i}}{\overline{z} + z}$

$= -\dfrac{\text{i}}{z + \overline{z}}$

$= -Z$

On en déduit que Z est imaginaire.

⑨ **1.** $(3+2i)z+5i-3 = 7-i$

$\Leftrightarrow (3+2i)z = 7-i-5i+3$ → On élimine de chaque côté $+5i-3$, comme dans les équations réelles.

$\Leftrightarrow (3+2i)z = 10-6i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{10-6i}{3+2i}$ → On élimine de chaque côté la multiplication par $3+2i$ avec une division par $3+2i$ de chaque côté.

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(10-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{18}{13}-\dfrac{38}{13}i$

Donc : $\mathscr{S} = \{\dfrac{18}{13}-\dfrac{38}{13}i\}$

2. $4iz+2i = 1-z+i$

$\Leftrightarrow 4iz+z = 1+i-2i$

$\Leftrightarrow (1+4i)z = 1-i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1-i}{1+4i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(1-i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1-4i-i+4i^2}{1^2+4^2}$

$\Leftrightarrow z = -\dfrac{3}{17}-\dfrac{5}{17}i$

Donc : $\mathscr{S} = \{-\dfrac{3}{17}-\dfrac{5}{17}i\}$

3. $3z+1-2i = 4-3i-2iz$

$\Leftrightarrow 3z+2iz = 4-3i-1+2i$

$\Leftrightarrow (3+2i)z = 3-i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3-i}{3+2i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(3-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{7}{13}-\dfrac{9}{13}i$

Donc : $\mathscr{S} = \{\dfrac{7}{13}-\dfrac{9}{13}i\}$.

4. $\dfrac{1+z}{i-z} = 2$

$\Leftrightarrow 1+z = 2(i-z)$ → Égalité des produits en croix.

$\Leftrightarrow 1+z = 2i-2z$

$\Leftrightarrow z+2z = -1+2i$

$\Leftrightarrow 3z = -1+2i$

$\Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$

Donc : $\mathscr{S} = \{-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i\}$.

5. $\dfrac{z+1}{z+i} = 1$

$\Leftrightarrow z+1 = z+i$

$\Leftrightarrow z-z = -1+i$

$\Leftrightarrow 0 = -1+i$: impossible

Donc : $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \varnothing$.

6. $z^2+1 = 0$

$\Leftrightarrow z^2+1^2 = 0$

$\Leftrightarrow (z+i)(z-i) = 0$ → J'applique l'identité remarquable : $\boldsymbol{a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)}$.

$\Leftrightarrow z = -i$ ou $z = i$

Donc : $\mathscr{S} = \{-i ; i\}$

7. $z^2 = -25$ → Attention à ne pas dire que c'est impossible car un carré ne peut pas être négatif !

$\Leftrightarrow z^2+5^2 = 0$

$\Leftrightarrow (z+5i)(z-5i) = 0$ → J'applique l'identité remarquable : $\boldsymbol{a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)}$.

$\Leftrightarrow z = -5i$ ou $z = 5i$

Donc : $\mathscr{S} = \{-5i ; 5i\}$

8. $z^4 = 1$

$\Leftrightarrow\ z^4 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow\ (z^2)^2 - 1^2 = 0$

$\Leftrightarrow\ (z^2 + 1)(z^2 - 1) = 0$ → *Identité remarquable habituelle* $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$ *avec* $a = z^2$ *et* $b = 1$.

$\Leftrightarrow\ z^2 + 1^2 = 0$ ou $z^2 - 1^2 = 0$

$\Leftrightarrow\ (z + i)(z - i) = 0$ ou $(z + 1)(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow\ z = i$ ou $z = -i$ ou $z = 1$ ou $z = -1$

Donc : $\mathscr{S} = \{ 1 ; -1 ; i ; -i \}$

---

⑩ **1.** $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times8 = -16 < 0$

donc il y a deux solutions complexes conjuguées $\dfrac{-(-4) + i\sqrt{16}}{2\times1} = 2 + 2i$ et $2 - 2i$.

2. $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times3 = -8 < 0$

donc il y a deux solutions complexes conjuguées $\dfrac{-(-2) + i\sqrt{8}}{2\times1} = 1 + i\sqrt{2}$ et $1 - i\sqrt{2}$.

3. $\Delta = (-6)^2 - 4\times1\times10 = -4 < 0$

donc il y a deux solutions complexes conjuguées $\dfrac{-(-6) + i\sqrt{4}}{2\times1} = 3 + i$ et $3 - i$.

4. On pose $Z = z^2$.

Alors :

$z^4 + 2z^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow\ Z^2 + 2Z - 8 = 0$

Le discriminant de $Z^2 + 2Z - 8$ est $\Delta = 2^2 - 4\times1\times(-8) = 36 > 0$

donc $Z^2 + 2Z - 8$ possède deux racines réelles $\dfrac{-2 + \sqrt{36}}{2\times1} = 2$ et $\dfrac{-2 - \sqrt{36}}{2\times1} = -4$

donc l'équation est équivalente à :

$Z = 2$ ou $Z = -4$

$\Leftrightarrow\ z^2 = 2$ ou $z^2 = -4$

$\Leftrightarrow\ z = \sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2}$ ou $z = 2i$ ou $z = -2i$ → *Attention à ne pas exclure la 2ème équation en disant qu'un carré ne peut être négatif !*

Donc $\mathscr{S} = \{ \sqrt{2} ; -\sqrt{2} ; 2i ; -2i \}$.

5. $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{4}{z} + 13 = 0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{4z}{z^2} + \dfrac{13z^2}{z^2} = 0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1 - 4z + 13z^2}{z^2} = 0$

$\Leftrightarrow\ 1 - 4z + 13z^2 = 0$ → *Rappelons le théorème du quotient nul :* $\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4\times13\times1 = -36 < 0$ → *Attention, le coefficient dominant n'est pas 1, c'est 13...*

donc il y a deux solutions complexes conjuguées $\dfrac{-(-4) + i\sqrt{36}}{2\times13} = \dfrac{2}{13} + i\dfrac{3}{13}$ et $\dfrac{2}{13} - i\dfrac{3}{13}$.

---

⑪ **a.** $P(-1) = (-1)^3 + 2\times(-1)^2 - 1$

$= -1 + 2 - 1 = 0$

donc -1 est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b. $(z + 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c$

$= az^3 + (b + a)z^2 + (c + b)z + c$.

c. $az^3 + (b + a)z^2 + (c + b)z + c = z^3 + 2z^2 - 1$

donc, par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 2 \\ c + b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c + b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$ car $1 + (-1) = 0$.

Petite explication pour ***résoudre un système de 4 équations à 3 inconnues*** *:*
- *on gèle une équation, ici la 3ème,*
- *avec les trois autres, on trouve les valeurs de* a , b *et* c .

Attention, l'équation gelée peut être vérifiée ou non par les trois valeurs.
- *Si elle est vérifiée, les trois valeurs trouvées forment le triplet solution,*
- *si elle n'est pas vérifiée, le système est impossible et n'a pas de solution.*

d. $P(z) = 0$

$\Leftrightarrow\ (z + 1)(z^2 + z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow\ z = -1$ ou $z^2 + z - 1 = 0$

Le discriminant de $z^2 + z - 1$ est $\Delta = 1^2 - 4\times1\times(-1) = 5 > 0$

donc $z^2 + z - 1$ possède deux racines réelles $\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2\times1} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Donc : $\mathscr{S} = \{ -1 ; \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \}$. → *Une équation d'inconnue complexe dont toutes les solutions sont réelles.*

⑫ **a.** $P(3) = 3^3 - 7\times3^2 + 25\times3 - 39$
$= 27 - 63 + 75 - 39 = 0$
donc 3 est une solution de l'équation $P(z) = 0$

donc $P(z)$ s'écrit sous la forme $(z-3)(az^2+bz+c)$ avec a, b et c réels..

b. $(z-3)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - 3az^2 - 3bz - 3c$
$= az^3 + (b-3a)z^2 + (c-3b)z - 3c$

qui est égal à $z^3 - 7z^2 + 25z - 39$,

donc, par identification : $\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-7 \\ c-3b=25 \\ -3c=-39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c-3b=25 \\ c=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=13 \end{cases}$ car $13-3\times(-4) = 13+12 = 25$.

d. $P(z) = 0$
$\Leftrightarrow (z-3)(z^2-4z+13) = 0$
$\Leftrightarrow z = 3$ ou $z^2 - 4z + 13 = 0$

Le discriminant de $z^2 - 4z + 13$ est $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times13 = -36 < 0$

donc $z^2 - 4z + 13$ possède deux racines complexes conjuguées $\dfrac{-(-4)+\mathrm{i}\sqrt{36}}{2\times1} = 2+3\mathrm{i}$ et $2-3\mathrm{i}$.

Donc : $\mathscr{S} = \{\, 3 \,;\, 2+3\mathrm{i} \,;\, 2-3\mathrm{i} \,\}$.

---

⑬ **a.** *Contrairement aux deux exercices précédents, on ne donne pas la valeur qui permet de factoriser.*
Mais on voit quand même une solution évidente...

$z^3 = 1$
$\Leftrightarrow z^3 - 1 = 0$

1 est une solution car $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$
donc $z^3 - 1$ peut s'écrire $(z-1)(az^2+bz+c)$, avec a, b et c réels.
$(z-1)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c$
$= az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$.

qui est égal à $z^3 - 1$,

donc, par identification : $\begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-b=0 \\ -c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c-b=0 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$ car $1-1=0$.

Donc :
$z^3 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$
$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

Le discriminant de $z^2 + z + 1$ est $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$

donc $z^2 + z + 1$ possède deux racines complexes conjuguées $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2\times1} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc : $\mathscr{S} = \left\{\, 1 \,;\, -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \,;\, -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \,\right\}$.

b. *Remarquer que* -1 *est une solution évidente.*

-1 est une solution car $(-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$
donc $z^3 + 1$ peut s'écrire $(z+1)(az^2+bz+c)$, avec a, b et c réels.
Or $(z+1)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c$
$= az^3 + (b+a)z^2 + (c+b)z + c$

qui est égal à $z^3 + 1$,

donc, par identification : $\begin{cases} a=1 \\ b+a=0 \\ c+b=0 \\ c=1 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \,. \end{cases}$

$z^3 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (z+1)(z^2-z+1) = 0$
$\Leftrightarrow z = -1$ ou $z^2 - z + 1 = 0$

Le discriminant de $z^2 - z + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$

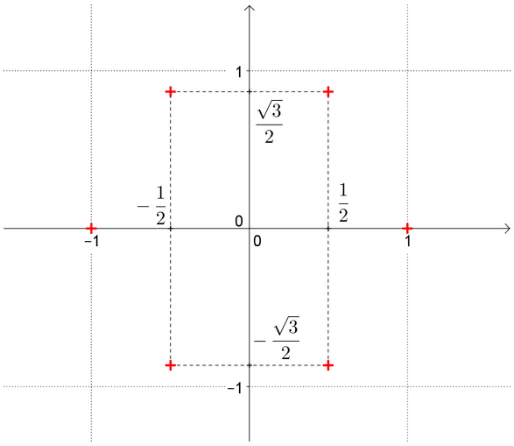
donc $z^2 - z + 1$ possède deux racines complexes conjuguées $\dfrac{-(-1)+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2\times1} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc : $\mathscr{S} = \left\{\, -1 \,;\, \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \,;\, \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \,\right\}$.

c. $z^6 = 1$
$\Leftrightarrow z^6 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (z^3)^2 - 1^2 = 0$
$\Leftrightarrow (z^3-1)(z^3+1) = 0$
$\Leftrightarrow z^3 - 1 = 0$ ou $z^3 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $z = 1$ ou $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -1$ ou $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'après **a.** et **b.**

Donc : $\mathscr{S} = \{\, 1 \,;\, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \,;\, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \,;\, -1 \,;\, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \,;\, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \,\}$.



On constate que les six solutions sont les affixes des sommets d'un hexagone régulier.

Vous aurez bien sûr remarqué que $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$.
Ce qui laisse penser que la trigonométrie a un lien avec les complexes...

---

⑭ **1.** Posons $z = x + iy$ avec x et y réels. $\rightarrow$ Attention à penser à préciser que x et y sont réels sinon la suite n'a pas de sens.

$2z - 3i\,\overline{z} - 1 = 0$
$\Leftrightarrow$ $2\,(x + iy) - 3i\,(x - iy) - 1 = 0$
$\Leftrightarrow$ $2x + 2iy - 3ix - 3y - 1 = 0$ $\rightarrow$ Attention au signe de $3y$!
$\Leftrightarrow$ $2x - 3y - 1 + i\,(2y - 3x) = 0$

Pour que le complexe $2x - 3y - 1 + i\,(2y - 3x)$ soit nul,
il faut que sa partie réelle $2x - 3y - 1$ **et** sa partie imaginaire $2y - 3x$ soient nulles.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 2y - 3x = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ On vous laisse résoudre ce simple système par substitution ou combinaison linéaire.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \end{cases}$ $\rightarrow$ Attention, vous n'avez pas trouvé deux solutions...
Vous avez trouvé la partie réelle et la partie imaginaire d'une seule solution complexe.

Donc : $\mathscr{S} = \{\, -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i \,\}$.

---

2. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

$z = i\,\overline{z}$
$\Leftrightarrow$ $x + iy = i\,(x - iy)$
$\Leftrightarrow$ $x + iy = ix + y$
$\Leftrightarrow$ $x - y + iy - ix = 0$
$\Leftrightarrow$ $x - y + i\,(y - x) = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x \end{cases}$ $\rightarrow$ On obtient deux fois la même équation !
$\Leftrightarrow$ $y = x$

Donc, l'ensemble (E) est la droite d'équation $y = x$, c'est-à-dire la 1ère bissectrice.

On ne demande pas de résoudre, donc pas besoin de donner $\mathscr{S}$.
Tant mieux car il n'est pas agréable à écrire : $\mathscr{S} = \{\, x + ix \,;\, x \in \mathbb{R} \,\}$.

---

3. Je pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

$z + i\,\overline{z} = 0$
$\Leftrightarrow$ $x + iy + i\,(x - iy) = 0$
$\Leftrightarrow$ $x + iy + ix + y = 0$
$\Leftrightarrow$ $x + y + i\,(x + y) = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow$ $x + y = 0$

Donc, l'ensemble (F) est la droite d'équation $x + y = 0$.

---

5. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

$z^2 - 4\,\overline{z} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x + \mathrm{i}y)^2 - 4(x - \mathrm{i}y) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 4x + 4\mathrm{i}y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 4x - 5 + \mathrm{i}(4y + 2xy) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0 \\ 4y + 2xy = 0 \end{cases}$

Voici une situation bien compliquée...

La 2ème équation semble plus abordable avec son facteur commun évident, laissons tranquille la 1ère pour le moment :

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0 \\ 2y(2 + x) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0 \\ 2y = 0 \text{ ou } 2 + x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0 \\ y = 0 \text{ ou } x = -2 \end{cases}$

L'astuce consiste ici à découper en deux systèmes :

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Remplaçons y par 0 dans le premier système et x par -2 dans le second :

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 0^2 - 4x - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} (-2)^2 - y^2 - 4\times(-2) - 5 = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y^2 = 7 \\ x = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ ou } x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = \sqrt{7} \text{ ou } y = -\sqrt{7} \\ x = -2 \end{cases}$ $\longrightarrow$ L'équation $x^2 - 4x - 5 = 0$ a été résolue avec le discriminant.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = \sqrt{7} \\ x = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = -\sqrt{7} \\ x = -2 \end{cases}$

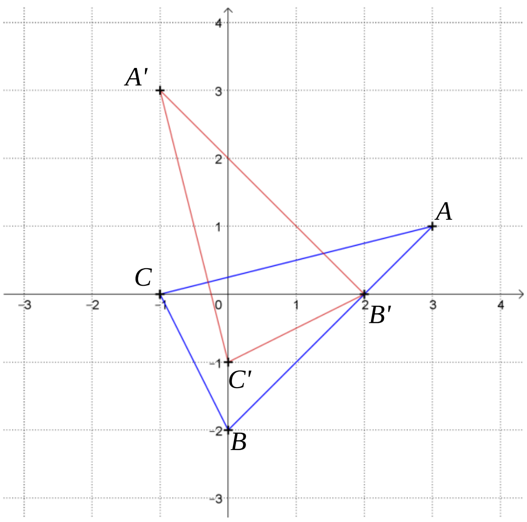
Donc : $\mathscr{S} = \{\, 5 \,;\, -1 \,;\, -2 + \mathrm{i}\sqrt{7} \,;\, -2 - \mathrm{i}\sqrt{7} \,\}$.

---

⑮ **1.** A' a pour affixe $\mathrm{i}(3 + \mathrm{i}) = -1 + 3\mathrm{i}$.

B' a pour affixe $\mathrm{i}(-2\mathrm{i}) = 2$.

C' a pour affixe $\mathrm{i}(-1) = -\mathrm{i}$.



Il semblerait que le triangle ABC ait été tourné pour donner le triangle $A'B'C'$.
Il y a peut-être une rotation derrière tout ça...

2. $M(z)$ invariant

$\Leftrightarrow M(z) = M'(z')$

$\Leftrightarrow z = z'$

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}\,z$

$\Leftrightarrow z - \mathrm{i}\,z = 0$

$\Leftrightarrow z(1 - \mathrm{i}) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$

Donc, il n'y a qu'un seul point invariant de coordonnées $(0\,;0)$. $\longrightarrow$ Ne serait-ce pas le centre de la rotation ?...

3. Méthode 1 : en utilisant la forme algébrique de z

Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

$M\,(x + \mathrm{i}y) \in (E_1) \Leftrightarrow$ son image M' a une affixe $\mathrm{i}\,(x + \mathrm{i}y)$ réelle

$\Leftrightarrow -y + \mathrm{i}x$ est réel $\longrightarrow$ La partie réelle est $-y + 1$ et la partie imaginaire est x .

$\Leftrightarrow x = 0$ $\longrightarrow$ Il faut que la partie imaginaire soit nulle.

Attention, on n'a pas trouvé 0 comme unique solution !

On a trouvé une infinité de solutions puisque, pendant que x est fixé à 0, y prend toutes les valeurs réelles…

Donc, (E_1) est la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées.

Méthode 2 : en utilisant la caractérisation par le conjugué : z réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$

$M\,(z) \in (E_1) \Leftrightarrow \mathrm{i}\,z$ réel

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,z = \overline{\mathrm{i}\,z}$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,z = -\mathrm{i}\,\overline{z}$ $\longrightarrow$ Le conjugué de i est $-\mathrm{i}$ et le conjugué de 1 est 1 .

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,z + \mathrm{i}\,\overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,(z + \overline{z}) = 0$

$\Leftrightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

$\Leftrightarrow z$ est imaginaire $\longrightarrow$ C'est l'autre caractérisation par le conjugué : z imaginaire $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

$\Leftrightarrow M$ est sur l'axe des ordonnées.

C'est une méthode classique qu'il faut connaître.
Mais il faut avouer qu'elle plus longue que la première.
Et en plus, elle ne fonctionne pas pour la question suivante…

Donc, (E_1) est l'axe des ordonnées.

4. Méthode 1 : en utilisant la forme algébrique de z

Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

$M\,(x + \mathrm{i}y) \in (E_2) \Leftrightarrow$ son image M' a une affixe $\mathrm{i}\,(x + \mathrm{i}y)$ imaginaire

$\Leftrightarrow -y + \mathrm{i}x$ imaginaire

$\Leftrightarrow -y = 0$ $\longrightarrow$ Il faut que la partie réelle soit nulle.

$\Leftrightarrow y = 0$ $\longrightarrow$ Là encore, une infinité de solutions.

Donc, (E_2) est la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses.

Méthode 2 : en utilisant la caractérisation par le conjugué : z réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$

$M\,(z) \in (E_1) \Leftrightarrow \mathrm{i}\,z$ imaginaire

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,z = -\,\overline{\mathrm{i}\,z}$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,z = \mathrm{i}\,\overline{z}$ $\longrightarrow$ Le conjugué de i est $-\mathrm{i}$ et le conjugué de 1 est 1 .

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,z - \mathrm{i}\,\overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,(z - \overline{z}) = 0$

$\Leftrightarrow z - \overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z} = z$

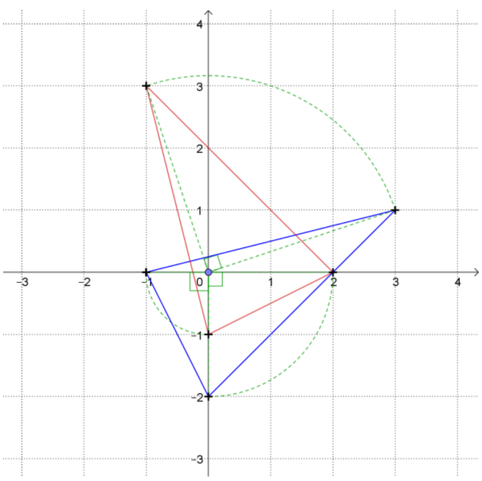
$\Leftrightarrow z$ est réel $\longrightarrow$ C'est l'autre caractérisation par le conjugué : z imaginaire $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

$\Leftrightarrow M$ est sur l'axe des abscisses.

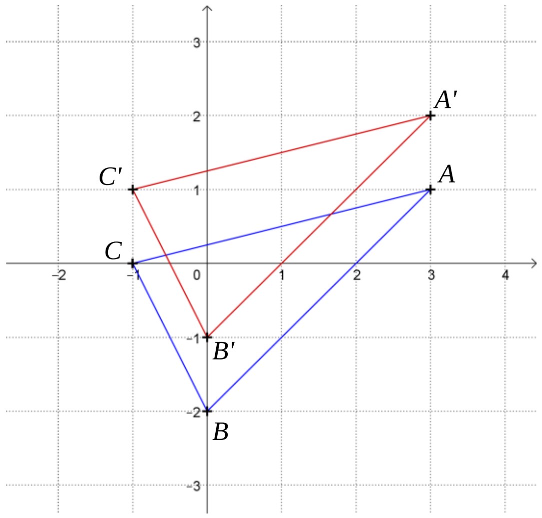
C'est une méthode classique qu'il faut connaître.
Mais il faut avouer qu'elle plus longue que la première.
Et en plus, elle ne fonctionne pas pour la question suivante…

Donc, (E_2) est l'axe des abscisses.

La transformation t est en effet la rotation de centre $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.



⑯ **1.** A' a pour affixe $(3 + i) + i = 3 + 2i$.
B' a pour affixe $(-2i) + i = -i$.
C' a pour affixe $(-1) + i = -1 + i$.



Tout porte à croire que le triangle ABC a été translaté.

2. $M(z)$ invariant
$\Leftrightarrow z = z + i$
$\Leftrightarrow 0 = i$: impossible
Donc, il n'y a pas de point invariant.

3. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

$M(x + iy) \in (E_1) \Leftrightarrow (x + iy) + i$ réel
$\Leftrightarrow x + i(y + 1)$ est réel
$\Leftrightarrow y + 1 = 0$
$\Leftrightarrow y = -1$

Donc, (E_1) est la droite d'équation $y = -1$.

4. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

$M(x + iy) \in (E_2) \Leftrightarrow (x + iy) + i$ imaginaire
$\Leftrightarrow x + i(y + 1)$ imaginaire
$\Leftrightarrow x = 0$

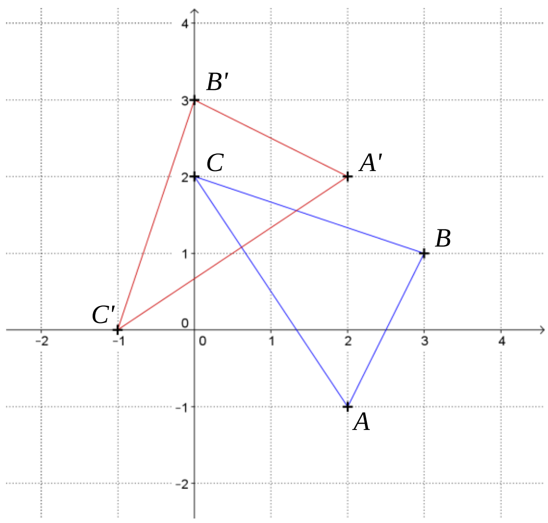
Donc, (E_2) est la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées.

La transformation t est en effet la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

⑰ **1.** A' a pour affixe $i(2 - i) + 1 = 2i + 1 + 1 = 2 + 2i$.
B' a pour affixe $i(3 + i) + 1 = 3i - 1 + 1 = 3i$.
C' a pour affixe $i(2i) + 1 = -2 + 1 = -1$.

On voit en particulier que les quatre points de la droite d'équation $y = 1$ ont tous leurs images sur l'axe des ordonnées.



Il semblerait que le triangle ABC ait été tourné pour donner le triangle $A'B'C'$.
Il y a peut-être une rotation derrière tout ça...

2. $M(z)$ invariant

$\Leftrightarrow M(z) = M'(z')$

$\Leftrightarrow z = z'$

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}\,z + 1$

$\Leftrightarrow z - \mathrm{i}\,z = 1$

$\Leftrightarrow z(1 - \mathrm{i}) = 1$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$

Donc, il n'y a qu'un seul point invariant de coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. $\longrightarrow$ Ne serait-ce pas le centre de la rotation ?...

3. Méthode 1 : en utilisant la forme algébrique de z

Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

$M(x + \mathrm{i}y) \in (E_1) \Leftrightarrow$ son image M' a une affixe $\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 1$ réelle

$\Leftrightarrow -y + 1 + \mathrm{i}x$ est réel $\longrightarrow$ La partie réelle est $-y + 1$ et la partie imaginaire est x.

$\Leftrightarrow x = 0$ $\longrightarrow$ Il faut que la partie imaginaire soit nulle.

Attention, on n'a pas trouvé 0 comme unique solution !

On a trouvé une infinité de solutions puisque, pendant que x est fixé à 0, y prend toutes les valeurs réelles...

Donc, (E_1) est la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées.

Méthode 2 : en utilisant la caractérisation par le conjugué : z réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$

$M(z) \in (E_1) \Leftrightarrow \mathrm{i}\,z + 1$ réel

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,z + 1 = \overline{\mathrm{i}\,z + 1}$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,z + 1 = -\mathrm{i}\,\overline{z} + 1$ $\longrightarrow$ Le conjugué de i est $-\mathrm{i}$ et le conjugué de 1 est 1.

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,z + \mathrm{i}\,\overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}(z + \overline{z}) = 0$

$\Leftrightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

$\Leftrightarrow z$ est imaginaire $\longrightarrow$ C'est l'autre caractérisation par le conjugué : z imaginaire $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

$\Leftrightarrow M$ est sur l'axe des ordonnées.

Donc, (E_1) est l'axe des ordonnées.

C'est une méthode classique qu'il faut connaître. Mais il faut avouer qu'elle plus longue que la première. Et en plus, elle ne fonctionne pas pour la question suivante...

4. Méthode 1 : en utilisant la forme algébrique de z

Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

$M(x + \mathrm{i}y) \in (E_2) \Leftrightarrow$ son image M' a une affixe $\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 1$ imaginaire

$\Leftrightarrow -y + 1 + \mathrm{i}x$ imaginaire

$\Leftrightarrow -y + 1 = 0$ $\longrightarrow$ Il faut que la partie réelle soit nulle.

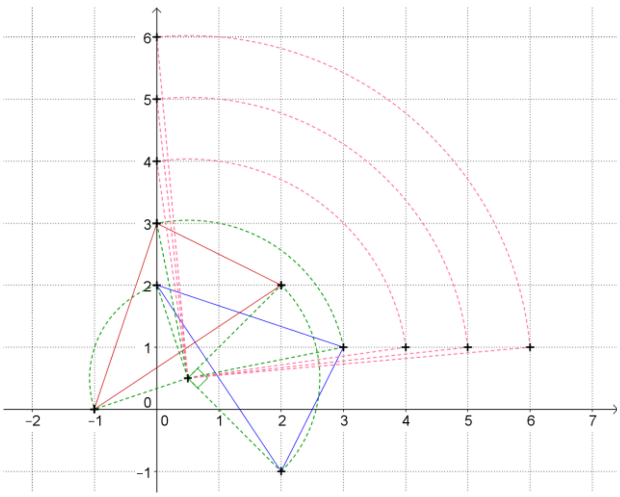
$\Leftrightarrow y = 1$ $\longrightarrow$ Là encore, une infinité de solutions.

Donc, (E_2) est la droite d'équation $y = 1$.

La méthode 2 ne fonctionne pas car z et $\overline{z}$ ne peuvent caractériser la droite d'équation $y = 1$.

La transformation t est en effet la rotation de centre $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.

On voit en particulier que les quatre points de la droite d'équation $y = 1$ ont tous leurs images sur l'axe des ordonnées.



⑱ **1.** $M(z) \in \Gamma_1$
$\Leftrightarrow z^2 = z$
$\Leftrightarrow z^2 - z = 0$
$\Leftrightarrow z(z-1) = 0$
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$

Donc, Γ_1 est l'ensemble des points de coordonnées $(0;0)$ et $(1;0)$.

2. Posons $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels.

$M(x+\mathrm{i}\,y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow (x+\mathrm{i}\,y)^2$ est réel
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ est réel
$\Leftrightarrow 2xy = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$

Donc, (E) est la réunion des droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire de l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

3. Posons $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels.

$M(x+\mathrm{i}\,y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow (x+\mathrm{i}\,y)^2$ est imaginaire
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ est imaginaire
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0$
$\Leftrightarrow x - y = 0$ ou $x + y = 0$

Donc, (E) est la réunion des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.

---

⑲ **1.** $M(z)$ invariant
$\Leftrightarrow z' = z$
$\Leftrightarrow z^2 + 4z + 3 = z$
$\Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4\times1\times3 = -3 < 0$

Donc, il y a deux solutions complexes conjuguées $\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2\times1} = -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{3}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc, il y a bien deux points invariants, de coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. $M(x+\mathrm{i}\,y) \in (E)$
$\Leftrightarrow z^2 + 4z + 3$ est réel
$\Leftrightarrow (x+\mathrm{i}\,y)^2 + 4(x+\mathrm{i}\,y) + 3$ est réel
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy + 4x + 4\mathrm{i}y + 3$ est réel
$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 4x + 3) + \mathrm{i}(2xy + 4y)$ est réel
$\Leftrightarrow 2xy + 4y = 0$
$\Leftrightarrow 2y(x+2) = 0$
$\Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -2$

Donc, (E) est la réunion des droites d'équations $y = 0$ et $x = -2$.

---

⑳ *Partie A*

1. Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3 < 0$
donc le polynôme $x^2 + x + 1$ n'a pas de racine et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Donc f est définie pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. • $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \text{, donc par somme, } \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• $x^2 + x + 1 = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 \text{ donc, par produit, } \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases}$

donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. f de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ dérivable strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 1$.
Donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$,

donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\sqrt{x^2+x+1} > 0$,
donc, $f'(x)$ est du signe de $2x+1$.

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
signes de $2x+1$		$-$	0	$+$	
signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Partie B

1. A' a pour affixe $(2\mathrm{i})^2 + 2\mathrm{i} + 1 = -4 + 2\mathrm{i} + 1 = -3 + 2\mathrm{i}$.
B' a pour affixe $\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$.

2. $M(z)$ invariant
$\Leftrightarrow z = z^2 + z + 1$
$\Leftrightarrow z^2 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow z^2 - \mathrm{i}^2 = 0$
$\Leftrightarrow (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}) = 0$
$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$
$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}$ car M dans (P) a une affixe de partie imaginaire positive ou nulle
Il y a donc un seul point invariant dans (P), de coordonnées $(0\,;1)$.

3. $M(x + \mathrm{i}y) \in (R)$
$\Leftrightarrow z'$ réel
$\Leftrightarrow (x + \mathrm{i}y)^2 + x + \mathrm{i}y + 1$ réel
$\Leftrightarrow x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + x + \mathrm{i}y + 1$ réel
$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + x + 1) + \mathrm{i}(2xy + y)$ réel
$\Leftrightarrow 2xy + y = 0$
$\Leftrightarrow y(2x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow y = 0$ ou $2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$
Donc, (R) est la réunion des droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 0$.

4. z' imaginaire
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow y^2 = x^2 + x + 1$
$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ ou $y = -\sqrt{x^2 + x + 1}$
$\Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ car M a une affixe de partie imaginaire positive ou nulle
$\Leftrightarrow y = f(x)$
$\Leftrightarrow M \in (C)$

5. D'après la question **4.** de la *Partie A*, la fonction f admet un minimum $\frac{\sqrt{3}}{2}$ atteint en $x = -\frac{1}{2}$.
Donc, le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est le point de (C) le plus proche de l'axe des réels.
Il a donc pour affixe $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est B.
Son image est B' d'affixe 0, c'est l'origine.

㉑ **a.** L’écriture matricielle de 1 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On reconnaît la matrice unité I_2 d’ordre 2.

L’écriture matricielle de -1 est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L’écriture matricielle de i est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que le carré de l’écriture matricielle de i est égal à l’écriture matricielle de -1, ce qui rappelle bien sûr que $\mathrm{i}^2 = -1$.

b. L’écriture matricielle de $\mathrm{i}b$ est $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

L’écriture matricielle de a est $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

L'écriture matricielle de $\overline{z}$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

L'écriture matricielle de $z\,\overline{z}$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $(a^2+b^2)\,I_2$.

Ce qui rappelle bien sûr que $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$.

c. L'écriture matricielle $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $z\,\overline{z} = a + \mathrm{i}\,b$ peut s'écrire $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. L'écriture matricielle de $z\,z'$ est

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & -bc-ad \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & 0 \\ 0 & ac-bd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -bc-ad \\ bc+ad & 0 \end{pmatrix} \\ &= (ac-bd)\,I_2 + (bc+ad)\,J\end{aligned}$$

Ce qui rappelle bien sûr que $(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = (ac-bd) + \mathrm{i}\,(bc+ad)$.

e. Le déterminant de $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est $a \times a - (-b) \times b = a^2 + b^2$.

Or, $a^2 + b^2$ est une somme de deux nombres positifs,
donc pour que $a^2 + b^2$ soit nul, il faut que a et b soient tous les deux nuls : impossible car z est non nul.

Donc, le déterminant est non nul et l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de z est inversible.

Son inverse est alors $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Ce qui rappelle bien sûr que $\dfrac{1}{a+\mathrm{i}b} = \dfrac{1\,(a-\mathrm{i}b)}{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)} = \dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2} = \dfrac{1}{a^2+b^2}(a-\mathrm{i}b)$.

Qu'on peut aussi écrire $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \dfrac{1}{z\,\overline{z}}\,\overline{z}$.