Savoir EFFECTUER DES CALCULS AVEC DES NOMBRES COMPLEXES SOUS FORME ALGÉBRIQUE

Ce que je dois avoir compris

- Évidemment, que $\mathrm{i}^2 = -1$.
  C'est l'existence de ce i dont le carré vaut -1 qui donne naissance à l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

- Tous les nombres complexes, notés souvent z, s'écrivent sous la forme $a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels, dite **forme algébrique**.
  a est appelé la **partie réelle** et b la **partie imaginaire** du nombre complexe.

  Remarque : Sous forme littérale, on écrit plutôt $\mathrm{i}b$ que $b\mathrm{i}$ mais on écrira toujours $5\mathrm{i}$ (et non $\mathrm{i}5$).

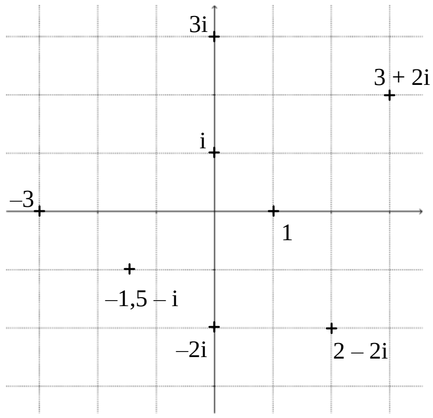
  Remarque : Lorsque la partie imaginaire est nulle, le nombre complexe est un réel. On en déduit que $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

  Remarque : Écrivez vos z en cursive $\mathcal{Z}$ et non z pour éviter qu'ils ressemblent à des 2.
  Et en majuscule, ajouter une barre Ƶ.

- Pour tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$, on définit le **conjugué** $a - \mathrm{i}b$, noté $\overline{z}$.
  De définition très simple mais indispensable pour de nombreux calculs…

  On retiendra notamment : $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$,
  qui peut être vu comme une identité remarquable complexe : $a^2 + b^2 = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)$.

- Chaque nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ peut être représenté graphiquement dans le plan par le point $M(a\,;b)$.
  On dit que M est le **point image** de z et que z est l'**affixe** de M, on note $M(z)$.
  Lorsqu'on remplace les points par les nombres complexes, on dit qu'on est dans le **plan complexe**.
  - Les complexes réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses.
  - Les complexes imaginaires sont les affixes des points de l'axe des ordonnées.
  - Deux complexes conjugués $a + \mathrm{i}b$ et $a - \mathrm{i}b$ ont des points images symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
  - Deux complexes opposés $a + \mathrm{i}b$ et $-a - \mathrm{i}b$ ont des points images symétriques par rapport à l'origine.



Ce que je dois savoir faire

- **Calculer une somme**

  Méthode : Il s'agit simplement d'ajouter les parties réelles ensembles et les parties imaginaires ensembles.

  Exemple 1 : $(3 - 2\mathrm{i}) + (2 + 5\mathrm{i}) = 5 + 3\mathrm{i}$.

- **Calculer un produit**

  Méthode : On applique la distributivité habituelle :

  - simple pour multiplier un complexe par un réel.

    Exemple 2 : $3(2 + 5\mathrm{i}) = 6 + 15\mathrm{i}$.

  - double pour multiplier deux complexes.

    Exemple 3 : $(3 - 2\mathrm{i})(2 + 5\mathrm{i}) = 6 + 15\mathrm{i} - 4\mathrm{i} - 10\,\mathrm{i}^2$ C'est là qu'on repère l'apparition d'un i^2 qui devient -1

    $= 6 + 11\mathrm{i} - 10\times(-1)$

    $= 6 + 11\mathrm{i} + 10$

    $= 16 + 11\mathrm{i}$

    Exemple 4 : $(3 + 2\mathrm{i})^2 = 3^2 + 2\times3\times2\mathrm{i} + (2\,\mathrm{i})^2$

    $= 9 + 12\mathrm{i} - 4$

    $= 5 + 12\mathrm{i}$

  Remarque : Les puissances de i rencontrées se calculent très facilement :

  $\mathrm{i}^0 = 1$; $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$; $\mathrm{i}^2 = -1$; $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$; $\mathrm{i}^4 = 1$; $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$; …

  Ainsi, si l'entier n s'écrit $4q + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant 3$ (division euclidienne de n par 4), alors $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^r$.

  De même : $\dfrac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$; $\dfrac{1}{\mathrm{i}^2} = \mathrm{i}^{-2} = -1$; …

- **Calculer un quotient**

La technique est très particulière !

Méthode : Il faut multiplier en haut et en bas par le conjugué du dénominateur et appliquer l'identité remarquable :

Exemple 5 : $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} = \dfrac{(2+5\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}{(4-3\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})} = \dfrac{8+6\mathrm{i}+20\mathrm{i}+15\mathrm{i}^2}{4^2+3^2} = \dfrac{-7+26\mathrm{i}}{25} = -\dfrac{7}{25}+\dfrac{26}{25}\mathrm{i}$

- **Calculer un conjugué**

Aucune difficulté bien sûr s'il s'agit juste de changer le signe.
Mais vous pourrez avoir à déterminer le conjugué d'un complexe qui n'est pas écrit sous forme $a+\mathrm{i}b$.
On utilise alors les propriétés suivantes :

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2} \quad ; \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad ; \quad \overline{\overline{z}} = z \quad ; \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}\ ,\ \overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

Exemple 6 : Ainsi, le conjugué de $z+\mathrm{i}$ n'est pas $z-\mathrm{i}$! C'est $\overline{z+\mathrm{i}} = \overline{z}+\overline{\mathrm{i}} = \overline{z}-\mathrm{i}$.

- **Utiliser les conjugués pour caractériser la nature réelle ou imaginaire d'un complexe**

On utilise les deux propriétés, généralement de gauche à droite :

- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z$ réel (qu'on peut noter $z \in \mathbb{R}$) et donc le point image est sur l'axe des abscisses.
- $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z$ imaginaire (qu'on peut noter $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$) et donc le point image est sur l'axe des ordonnées.

- **Résoudre une équation**

Quatre type d'équations :

- Les équations du 1^er degré sans $\overline{z}$.

Méthode : on applique les même techniques de transformations que dans $\mathbb{R}$.

- Les équations du 2^ème degré $az^2+bz+c=0$ à coefficients réels.

Méthode : On calcule le discriminant Δ .
Si Δ positif ou nul, on a les mêmes racines que pour les équations dans $\mathbb{R}$.
Si $\Delta < 0$, il y a deux racines conjuguées $\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Remarquez qu'il est inutile de calculer la seconde racine puisque c'est la conjuguée de la première.

- Les équations avec $\overline{z}$.

Méthode : 1) On pose $z = x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.
L'équation à une inconnue z devient une équation à deux inconnues x et y .
2) On regroupe les parties réelles et le parties imaginaires dans le membre de gauche pour se retrouver avec une équation de la forme *partie réelle* + i *partie imaginaire* = 0 .
3) On transforme alors l'équation en un système de deux équations $\begin{cases} \textit{partie réelle} = 0 \\ \textit{partie imaginaire} = 0 \end{cases}$ d'inconnues x et y .
Attention à bien maîtriser la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues.
4) On résout le système pour trouver les valeurs de x et de y .
5) On conclut avec les solutions complexes *valeur de x* + *valeur de y* i .

Remarque : On pourra demander l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie l'équation.

⚠ Si votre système se termine par $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$, n'allez pas conclure que $\mathcal{S} = \{\,2\,;-3\,\}$!
Car, vous avez trouvé la partie réelle et la partie imaginaire d'un seul complexe solution : $\mathcal{S} = \{\,2-3\mathrm{i}\,\}$.
Ou on écrit : La solution est l'affixe du point de coordonnées $(2\,;-3)$.

⚠ Si votre système se termine par $x=2$, n'allez pas conclure que $\mathcal{S} = \{\,2\,\}$!
En effet, les solutions sont tous les nombres complexes dont la partie réelle vaut 2.
On note alors : $\mathcal{S} = \{\,2+\mathrm{i}y\,;\,y \in \mathbb{R}\,\}$
Ou on écrit : Les solutions sont les affixes des points de la droite d'équation $x=2$.

- Les équations du 3ème degré avec une racine connue.

  La méthode sera détaillée dans les exercices. Elle repose sur ce qu'on appelle l'**identification de deux polynômes** :

$$az^3 + bz^2 + cz + d = a'z^3 + b'z^2 + c'z + d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases}$$

- **Étudier une transformation géométrique**

On travaille avec deux fonctions :

- une fonction complexe $f : z \mapsto f(z)$ (noté souvent z') qui transforme des nombres complexes en complexes ;
- la transformation géométrique associée $t : M(z) \mapsto M'(z')$ qui transforme des points en des points.

Pour trouver l'ensemble (E) des points M	on cherche leurs affixes z qui vérifient
invariants par t *i.e.* tels que $M' = M$	$f(z) = z$: c'est une simple équation à résoudre.
dont les images M' ont une affixe réelle	$f(z)$ réel : - on pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, - on exprime $f(z)$ en fonction de x et y, - on écrit que la partie imaginaire de $f(z)$ est nulle.
dont les images M' ont une affixe imaginaire	$f(z)$ imaginaire : - on pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, - on exprime $f(z)$ en fonction de x et y, - on écrit que la partie réelle de $f(z)$ est nulle.

Dans les trois situations, vous obtenez des complexes qu'il faut traduire en un ensemble de points.

Par exemple, si vous finissez avec $z = 2 + \mathrm{i}$, alors (E) est le point de coordonnées $(2 ; 1)$.
si vous finissez avec $x = 3$, alors (E) est la droite d'équation $x = 3$.
si vous finissez avec $x = 3$ ou $y = 1$, alors (E) est la réunion des droites d'équations $x = 3$ et $y = 1$.

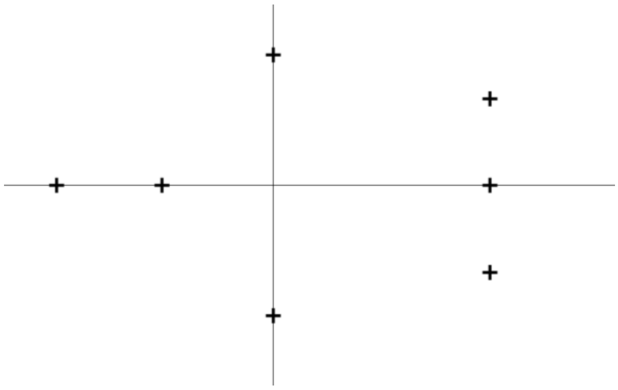
<u>*Remarque*</u> : Ne confondez pas $\begin{cases} M \text{ qui est le point image de } z \\ M' \text{ qui est le point image de } z', \text{ c'est-à-dire de } f(z) \\ M' \text{ qui est l'image de } M \text{ par } t. \end{cases}$

<u>*Remarques sur les exercices*</u>

- Les exercices ② à ⑥ travaillent toutes les techniques de calcul avec les <u>quatre opérations</u>.
  L'exercice ⑥ donne quelques instructions pour programmer des complexes en Python.
- Les exercices ⑦ et ⑧ demandent de déterminer des <u>conjugués</u>.
- L'exercice ⑨ est une série d'<u>équations de degré 1 ou plus</u> qui peuvent se résoudre avec les techniques habituelles.
- L'exercice ⑩ est une série d'<u>équations du second degré</u> à résoudre avec le discriminant.
- Les exercices ⑪ à ⑬ proposent des équations du troisième degré à résoudre avec une racine connue.
  La méthode est détaillée dans le ⑪.
- L'exercice ⑭ est une série d'<u>équations du premier degré</u> dont l'inconnue est exprimée aves z et $\overline{z}$.
- Les exercices ⑮ à ⑳ traitent les transformations géométriques définies par une fonction complexe.
  L'exercice ⑳ combine une étude de fonction réelle avec une tranformation.
- L'exercices ㉑ montre le lien étroit entre les nombres complexes et certaines matrices...

① On a placé ci-dessous sept points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 et M_7 d'affixes respectives les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 et z_7.
Retrouver la position de chaque point en utilisant les informations ci-dessous :

- z_2 a une partie imaginaire négative.
- z_2 et z_5 sont opposés.
- z_4 et z_6 sont opposés.
- z_1 et z_3 sont conjugués.
- $z_7 = \overline{z_7}$.
- $\mathbf{Im}(z_4) > \mathbf{Im}(z_1)$.
- $\mathbf{Re}(z_4) = \mathbf{Re}(z_1)$.



② Calculer $z_1 = \mathrm{i}^{2022}$; $z_2 = \mathrm{i}^{1301}$; $z_3 = (-\mathrm{i})^{3108}$; $z_4 = (2\mathrm{i})^{11}$; $z_5 = \dfrac{1}{\mathrm{i}^{891}}$.

③ On donne $z_1 = 1 - 5\mathrm{i}$ et $z_2 = 2 + 3\mathrm{i}$.
Calculer sous forme algébrique $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 z_2$; $\dfrac{1}{z_1}$; $\dfrac{1}{z_2}$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\dfrac{z_2}{z_1}$; $\dfrac{z_2}{z_1}$; $\dfrac{z_2}{3\mathrm{i}}$; $z_2^{\,2}$; $z_1^{\,3}$.

④ Calculer $z_1 = (3 + \mathrm{i})^5$; $z_2 = (1 - \mathrm{i})^6$ et $z_3 = (1 + 2\mathrm{i})^8$.

⑤ On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - (2 + \mathrm{i}\sqrt{2})z^2 + 2(1 + \mathrm{i}\sqrt{2})z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$.
Montrer que $\mathrm{i}\sqrt{2}$ est une racine de P.

⑥ En *Python*, on définit le complexe $a + \mathrm{i}b$ avec l'instruction `complex(a,b)`.
L'instruction `z.real` renvoie la partie réelle de la variable complexe `z` et `z.imag` renvoie sa partie imaginaire.

a. Rédiger un programme en *Python* qui affiche les valeurs des entiers n compris entre 0 et 100 telles que le nombre complexe $(3n + \mathrm{i})(-75 + \mathrm{i}n)$ est réel.
Préciser les valeurs affichées.

b. Y a-t-il d'autres entiers qui vérifient la condition ?

⑦ Déterminer sous forme algébrique les conjugués des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{5 - 2\mathrm{i}} \quad ; \quad z_2 = (1 + 3\mathrm{i})(2 - \mathrm{i}) \quad ; \quad z_3 = \frac{1 + 5\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}$$

⑧ **1.** Pour tout complexe z, on définit $Z = 2\mathrm{i}(\overline{z} - z)$.
Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de Z.
Que peut-on en déduire sur la nature de Z ?

2. Pour tout complexe z, on définit $Z = \mathrm{i}(z - \overline{z})$.
Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de Z. Que peut-on en déduire sur la nature de ces nombres Z ?

3. Pour tout complexe z non nul, on définit $Z = \dfrac{\mathrm{i}}{z + \overline{z}}$.
Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de Z. Que peut-on en déduire sur la nature de ces nombres Z ?

⑨ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $(3 + 2\mathrm{i})\, z + 5\mathrm{i} - 3 = 7 - \mathrm{i}$.

2. $4\mathrm{i}\, z + 2\mathrm{i} = 1 - z + \mathrm{i}$.

3. $3z + 1 - 2\mathrm{i} = 4 - 3\mathrm{i} - 2\mathrm{i}\,z$.

4. $\dfrac{1 + z}{\mathrm{i} - z} = 2$.

5. $\dfrac{z + 1}{z + \mathrm{i}} = 1$.

6. $z^2 + 1 = 0$.

7. $z^2 = -25$.

8. $z^4 = 1$.

---

10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^2 - 4z + 8 = 0$.

2. $z^2 - 2z + 3 = 0$.

3. $z^2 - 6z + 10 = 0$.

4. $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$.
C'est une **équation bicarré**.
On se ramène à une équation du second degré avec un changement d'inconnue : on pose $Z = z^2$.

5. $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{4}{z} + 13 = 0$.

---

11 On donne le polynôme du troisième degré $P(z) = z^3 + 2z^2 - 1$.

a. Démontrer que -1 est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b. On en déduit que $P(z)$ peut se factoriser sous la forme $(z + 1)\, (az^2 + bz + c)$, avec a , b et c réels.
Développer $(z + 1)\, (az^2 + bz + c)$ en ordonnant les termes suivant les puissances décroissantes de z .

c. L'expression trouvée au **b.** est égale à $z^3 + 2z^2 - 1$.
En déduire par identification un système de quatre équations d'inconnues a , b et c .
Résoudre ce système.

d. En déduire toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

---

12 Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^3 - 7z^2 + 25z - 39$.

a. Justifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z)$ s'écrit sous la forme $(z - 3)\, (az^2 + bz + c)$ avec a , b et c réels.

b. Déterminer les réels a , b et c .

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

---

13 **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 1 = 0$.

c. Déduire des deux questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 = 1$.
Dans un plan muni d'un repère, placer les six points images des solutions de cette équation.

⑭ **1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z - 3i\,\overline{z} - 1 = 0$.

2. Montrer que l'ensemble (E) des points du plan dont l'affixe z vérifie l'équation $z = i\,\overline{z}$ est une droite dont on précisera l'équation cartésienne.

3. Déterminer l'ensemble (F) des points du plan dont l'affixe z vérifie l'équation $z + i\,\overline{z} = 0$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2 = z\,\overline{z}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4\,\overline{z} - 5 = 0$.

---

⑮ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère la fonction complexe $f : z \mapsto z' = iz$.
On définit alors la transformation géométrique $t : M(z) \mapsto M'(z')$.

a. Soit les points $A(3 + i)$, $B(-2i)$ et $C(-1)$ et leurs images respectives A', B' et C' par t .
Calculer les affixes de A', B' et C' .
Placer les six points sur un graphique et tracer les triangles ABC et $A'B'C'$.

b. Déterminer les points invariants par cette transformation.

c. Déterminer l'ensemble (E_1) des points dont les images ont une affixe réelle.

d. Déterminer l'ensemble (E_2) des points dont les images ont une affixe imaginaire.

---

⑯ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère la transformation t qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe $z + i$.

a. Soit les points $A(3 + i)$, $B(-2i)$ et $C(-1)$ et leurs images respectives A', B' et C' par t .
Calculer les affixes de A', B' et C' .
Placer les six points sur un graphique et tracer les triangles ABC et $A'B'C'$.

b. Déterminer les points invariants par cette transformation.

c. Déterminer l'ensemble (E) des points dont les images ont une affixe réelle.

d. Déterminer l'ensemble (E_2) des points dont les images ont une affixe imaginaire.

---

⑰ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère la transformation qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe $iz + 1$.

a. Soit les points $A(2 - i)$, $B(3 + i)$ et $C(2i)$ et leurs images respectives A', B' et C' par t .
Calculer les affixes de A', B' et C' .
Placer les six points sur un graphique et tracer les triangles ABC et $A'B'C'$.

b. Déterminer les points invariants par cette transformation.

c. Déterminer l'ensemble (E) des points dont les images ont une affixe réelle.

d. Déterminer l'ensemble (E_2) des points dont les images ont une affixe imaginaire.

---

⑱ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère la transformation f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2$.
Remarquez que f désigne ici la transformation géométrique et non la fonction complexe.

a. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.

b. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre réel.
On exprimera Γ_2 comme réunion de deux ensembles.

c. Déterminer l'ensemble Γ_3 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire.

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 2012

⑲ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z^2 + 4z + 3$.

a. Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.

b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des abscisses.

D'après Baccalauréat Polynésie 2015

---

⑳ *Partie A*

On définit la fonction f pour x réel par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.
On note (C) la courbe représentative de f.

1. Justifier que f est définie pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Établir le tableau de variation de la fonction f.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note (P) le demi-plan au-dessus de l'axe des abscisses.
Les points de (P) ont donc des affixes de partie imaginaire strictement positive.

Pour tout point M de (P) d'affixe $z = x + iy$ avec x et y réels et $y > 0$, on considère la transformation qui à M associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + z + 1$.

1. On donne les points $A(2i)$ et $B\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Déterminer sous forme algébrique les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B par cette transformation.

2. Montrer que, dans (P), il y a un seul point invariant par cette transformation.

3. Déterminer l'ensemble (R) des points M dont le point M' associé a une affixe réelle.

4. Montrer que la courbe (C) définie dans la *Partie A* est l'ensemble des points M dont le point M' associé a une affixe imaginaire.

5. Montrer que, parmi les points de (C), il en existe un qui est le plus proche de l'axe des réels.
Quelle est son image par la transformation ?

㉑ À tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, on associe son <u>écriture matricielle</u> $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a. Donner l'écriture matricielle de 1. Quelle matrice usuelles reconnaît-on ?
Donner l'écriture matricielle de -1.
Donner l'écriture matricielle de i. On la notera J.
Calculer le carré de J.

b. Donner l'écriture matricielle d'un complexe imaginaire pur ib, d'un complexe réel pur a, de $\overline{z}$.
Puis calculer l'écriture matricielle de $z\overline{z}$.

c. Donner l'écriture matricielle de $z = a + ib$ décomposée en fonction de I_2 et J.

d. Calculer le produit des écritures matricielles de $z = a + ib$ et de $z' = c + id$, décomposé en fonction de I_2 et J.

e. Si z est non nul, montrer que son écriture matricielle est inversible et donner son inverse.

<u>*Remarque*</u> : L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et l'ensemble $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{avec } a \text{ et } b \text{ réels} \right\}$ et leurs opérations fonctionnent exactement de la même manière.

On dit que $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}$ sont **isomorphes** (du grec *isos* : même et *morfê* : forme).