

Correction de MATRICES - Fiche 1

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪

①
$$\begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

② 1.
$$M+N = \begin{bmatrix} 2+1 & 3-3 & -1+2 \\ 0-1 & -2+0 & 3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$M-N = \begin{bmatrix} 2-1 & 3+3 & -1-2 \\ 0+1 & -2-0 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$10M = \begin{bmatrix} 10 \times 2 & 10 \times 3 & 10 \times (-1) \\ 10 \times 0 & 10 \times (-2) & 10 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 & -10 \\ 0 & -20 & 30 \end{bmatrix}$$

$$2M+3N = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 3 \times 1 & 2 \times 3 - 3 \times 3 & -2 \times 1 + 3 \times 2 \\ 2 \times 0 - 3 \times 1 & -2 \times 2 + 3 \times 0 & 2 \times 3 + 3 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -3 & -4 & 21 \end{bmatrix}$$

2. Pour multiplier deux matrices, il faut que la 1^{ère} ait autant de colonnes que la 2^{ème} a de lignes.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+15-2 & -2-3 \\ -10+6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6-3 \\ -4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$EB = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-5+10 & -4+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$EC = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4-2+15 = 17$$

Écrivez une étape de calcul pour montrer que vous calculez à la main...

Entraînez-vous à faire ces calculs à la main, quitte à les vérifier à la calculatrice.

→ Le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne est un nombre !

③
$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1 & 2+1 & 2+2+1 \\ 2 & 1+2 & 1+2 \\ 1 & 1 & 2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10+3 & 5+5 & 5+6+5 \\ 4+3 & 2+3 & 2+6+3 \\ 2+1 & 1+3 & 1+2+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 10 & 16 \\ 7 & 5 & 11 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

→ Je multiplie les deux premières.

B est une matrice diagonale,

→ Heureusement...

$$\text{donc } B^5 = \begin{pmatrix} 0^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

④ Le carré de $\begin{pmatrix} 0 & n \\ m & 0 \end{pmatrix}$ vaut $\begin{pmatrix} 0 & n \\ m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n \\ m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nm & 0 \\ 0 & nm \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} nm & 0 \\ 0 & nm \end{pmatrix}$ est égale à l'opposé de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

⇔ $nm = -1$

⇔ $\begin{cases} n = 1 \\ m = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n = -1 \\ m = 1 \end{cases}$ car n et m sont des entiers

Les matrices solutions sont donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ceux qui connaissent les nombres complexes trouveront une analogie avec un célèbre nombre dont le carré vaut -1 ...

⑤ On pose $\mathcal{P}(n)$ l'égalité conjecturée.

♦ Initialisation :

$$\text{Par convention, } A^0 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & b^0 \end{bmatrix}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

♦ Itération :

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n quelconque.

Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{bmatrix} a \times a^n & 0 \\ 0 & b \times b^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

♦ Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n .

⑥ a. $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{bmatrix}$

b. ♦ On pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété à montrer « A^n nulle ».

♦ Initialisation :

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 18+36-54 & 54-54 & -54+54 \\ 18+36-54 & 54-54 & -54+54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

♦ Itération :

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 3$ quelconque.

Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

♦ Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

⑦ a. $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. On conjecture que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout n entier naturel.

c. ♦ Initialisation :

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc, c'est vrai au rang 0.}$$

♦ Itération :

Supposons que c'est vrai pour un entier n quelconque.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 + 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, c'est vrai au rang $n+1$.

♦ Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n .

⑧ a. $J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$J^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$J^4 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

b. On conjecture que, pour tout entier $n \geq 1$, $J^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$.

♦ On pose $\mathcal{P}(n)$ l'égalité conjecturée.

♦ Initialisation :

$$J^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-1} \\ 2^{1-1} & 2^{1-1} \end{bmatrix} = 2^{1-1} J \text{ donc } \mathcal{P}(1) \text{ est vraie.}$$

♦ Itération :

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 1$ quelconque.

Alors :

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J \times J^n \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix} \quad \text{car } 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n \\ &= \begin{bmatrix} 2^{(n+1)-1} & 2^{(n+1)-1} \\ 2^{(n+1)-1} & 2^{(n+1)-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

♦ Conclusion :

Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

c. $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 2I_2 + 3J$.

d. $(A+B)^3 = (A^2 + AB + BA + B^2)(A+B)$
 $= A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3 \rightarrow \text{Les mondes où la multiplication n'est pas commutative ne sont pas reposants...}$

e. $M^3 = (2I_2 + 3J)^3$
 $= (2I_2)^3 + (2I_2)^2(3J) + (2I_2)(3J)(2I_2) + (2I_2)(3J)^2 + (3J)(2I_2)^2 + (3J)(2I_2)(3J) + (3J)^2(2I_2) + (3J)^3$
 $= 8I_2 + 12J + 12J + 18J^2 + 12J + 18J^2 + 18J^2 + 27J^3$
 $= 8I_2 + 36J + 54J^2 + 27J^3$
 $= 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 36 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 54 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + 27 \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{d'après a.}$
 $= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36 & 36 \\ 36 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 108 & 108 \\ 108 & 108 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 108 & 108 \\ 108 & 108 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 260 & 252 \\ 252 & 260 \end{bmatrix}$

⑨ a. D'une part, $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+7 & 14-14 \\ -3+3 & 7-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D'autre part, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+7 & -2+2 \\ -21+21 & 7-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc, P est inversible et que son inverse est $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$.

b. $D = P^{-1}MP$
 $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -14 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -14 & -6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Comme D est diagonale, $D^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$

- c. ♦ $D = P^{-1}MP$
 donc $PD = PP^{-1}MP = MP$
 donc $PD P^{-1} = MP P^{-1} = M$.
- ♦ $M^5 = (PD P^{-1})^5$
 $= (PD P^{-1})(PD P^{-1})(PD P^{-1})(PD P^{-1})(PD P^{-1})$
 $= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D P^{-1}$
 $= PD^5 P^{-1}$
 $= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} -3 & -32 \\ 7 & 64 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 218 & 93 \\ -434 & -185 \end{bmatrix}$

⑩ a. $M^2 - 4M = \begin{pmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \times 1 & 4 \times 2 & 4 \times 2 \\ 4 \times 2 & 4 \times 1 & 4 \times 2 \\ 4 \times 2 & 4 \times 2 & 4 \times 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 5I_3$$

b. D'une part, $M \times \left(\frac{1}{5}(M - 4I_3)\right) = \frac{1}{5}(M^2 - 4M) = \frac{1}{5}(5I_3) = I_3$

D'autre part, $\left(\frac{1}{5}(M - 4I_3)\right) \times M = \frac{1}{5}(M^2 - 4M) = \frac{1}{5}(5I_3) = I_3$

donc M est inversible et son inverse est $\frac{1}{5}(M - 4I_3)$.

⑪ a. D'une part, $\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24+25 & -48+18+30 & -72+72 \\ 20-20 & 40-15-24 & 60-60 \\ -5+5 & -10+4+6 & -15+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D'autre part, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24+40-15 & 18-30+12 & 5-8+3 \\ 20-20 & -15+16 & -4+4 \\ -120+120 & 90-90 & 25-24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc M est inversible et son inverse est bien $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

b. $MX = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24x + 18y + 5z \\ 20x - 15y - 4z \\ -5x + 4y + z \end{bmatrix}$

Donc le système est équivalent à $MX = C$.

c. $MX = C$
 $\Leftrightarrow M^{-1}MX = M^{-1}C$
 $\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 81 \\ -67 \\ 17 \end{bmatrix}$
 $\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Donc, la solution est le triplet $(-2; 1; 3)$.