Savoir UTILISER UNE LOI EXPONENTIELLE

Ce que je dois savoir faire

- **Calculer la probabilité simple d'un des trois types d'évènements d'une loi exponentielle de paramètre donné λ**
  - $P(\, c \leqslant X \leqslant d\,) = \int_c^d \lambda\, e^{-\lambda x}\,.\,dx = [\,-e^{-\lambda x}\,]_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ (attention au changement d'ordre à cause du $-$)
  - $P(\, X \leqslant c\,) = \int_0^c \lambda\, e^{-\lambda x}\,.\,dx = [\,-e^{-\lambda x}\,]_0^c = 1 - e^{-\lambda c}$
  - $P(\, X \geqslant c\,) = 1 - P(\, X < c\,) = 1 - P(\, X \leqslant c\,) = e^{-\lambda c}$

  Ces deux évènements sont contraires. En fait, le contraire de $P(\, X \leqslant c\,)$ est $P(\, X > c\,)$, mais c'est la même chose que $P(\, X \geqslant c\,)$ car la probabilité d'un seul nombre est nulle.

  Remarque : Ce qui est en gris n'est pas obligatoire mais fera plaisir au correcteur…
  Et pour les questions de cours, il est fortement conseillé de le connaître par cœur.

- **Retrouver l'un des trois types d'évènements dans une consigne**
  - Si X désigne la durée de vie d'un individu :
    la probabilité qu'il soit encore vivant au bout de 5 ans $= P(\, X \geqslant 5\,)$
    la probabilité qu'il vive au moins 5 ans $= P(\, X \geqslant 5\,)$
    la probabilité qu'il ait une durée de vie entre 2 ans et 4 ans $= P(\, 2 \leqslant X \leqslant 4\,)$
    la probabilité qu'il ait une durée de vie inférieure à 10 ans $= P(\, X < 10\,) = P(\, X \leqslant 10\,)$

    Ne confondez pas les deux suivants :
    sachant qu'il vit encore au bout de 2 ans, la probabilité qu'il vive plus de 7 ans $= P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \geqslant 7\,)$
    sachant qu'il vit encore au bout de 2 ans, la probabilité qu'il vive 7 ans de plus $= P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \geqslant 2 + 7\,)$
  - Si T désigne un temps d'attente :
    la probabilité qu'on attende au moins 5 ans $= P(\, T \geqslant 5\,)$
    la probabilité qu'on attende moins de 2 ans $= P(\, T < 2\,) = P(\, T \leqslant 2\,)$

- **Calculer une probabilité conditionnelle avec une loi exponentielle**
  - *1ère méthode* : avec la formule de la durée de vie sans vieillissement (la plus jolie)

    $P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \geqslant 5\,) = P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \geqslant 2 + 3\,)$ $\rightarrow$ on décompose pour faire apparaître le temps déjà passé
    Remarque : On a vu qu'il y a des cas où la décomposition est déjà faite.

    $= P(\, X \geqslant 3\,)$ $\rightarrow$ car ça ne dépend que de la durée à venir, pas de la durée passée

    $P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \leqslant 5\,) = 1 - P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X > 5\,)$ $\rightarrow$ et on continue comme ci-dessus
  - *2ème méthode* : avec la formule des probabilités conditionnelles

    $$P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \geqslant 5\,) = \frac{P(\,(\, X \geqslant 2\,) \cap (\, X \geqslant 5\,)\,)}{P(\, X \geqslant 2\,)} = \frac{P(\, X \geqslant 5\,)}{P(\, X \geqslant 2\,)} = \frac{e^{-5\lambda}}{e^{-2\lambda}} = e^{-3\lambda}$$

    car l'intersection de $[\,2\,;+\infty\,[$ et $[\,5\,;+\infty\,[$ est $[\,5\,;+\infty\,[$

    $$P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \leqslant 5\,) = \frac{P(\,(\, X \geqslant 2\,) \cap (\, X \leqslant 5\,)\,)}{P(\, X \geqslant 2\,)} = \frac{P(\, 2 \leqslant X \leqslant 5\,)}{P(\, X \geqslant 2\,)} = \frac{e^{-2\lambda} - e^{-5\lambda}}{e^{-2\lambda}} = 1 - e^{-3\lambda}$$

    car l'intersection de $[\,2\,;+\infty\,[$ et $[\,0\,;5\,]$ est $[\,2\,;5\,]$

    Remarque : On voit que $P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \leqslant 5\,)$ est l'évènement contraire de $P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \geqslant 5\,)$.
    On peut donc écrire : $P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X \leqslant 5\,) = 1 - P_{(\,X \geqslant 2\,)}(\, X > 5\,)$ et avoir des calculs plus simples.

- **Calculer l'espérance mathématique**

  L'espérance E vaut simplement $\frac{1}{\lambda}$.

  Remarque : N'oubliez pas que cette espérance correspond à la moyenne de durée de vie, ou du temps d'attente.

- **Calculer le paramètre λ**
  - *1ère méthode* : avec l'espérance

    Le paramètre λ vaut simplement $\frac{1}{E}$.
  - *2ème méthode* : avec une probabilité connue

    On traduit $P(\, X \geqslant \ldots\,) = \ldots$ par une équation $e^{-\lambda \times \ldots} = \ldots$ d'inconnue λ, qu'on résout en utilisant $\ln$.

Remarques sur les exercices

- L'exercice **1.** est une série de questions calculatoires que vous retrouverez dans les types bac qui suivent.
- L'exercice **2.** propose trois QCM et un Vrai-Faux.
- Les exercices **3.** à **10.** sont des types Bac.
  Certains contiennent une question de cours (ROC ou autre). Ces questions de cours sont guidées et plutôt faciles.

---

1. *Arrondir les probabilités à* 10^{-3}.

1.1. La durée de vie, en jours, d'un appareil électrique est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$.
Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne moins de 200 jours.

1.2. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout ampoule d'un certain modèle, associe sa durée de vie, en jours.
On admet que cette variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 42\times10^{-5}$.
Quelle est la durée de vie moyenne d'une telle ampoule ?

1.3. On suppose que, au guichet d'une administration, le temps de traitement d'un dossier, en minutes, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}12$.
Déterminer la probabilité qu'un usager occupe un guichet entre 10 et 20 minutes.

1.4. Étant donnée une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ .
On sait que $P(X \leqslant 1{,}5) = 0{,}65$.
Calculer λ arrondi à 10^{-2} près.

1.5. Une variable aléatoire T donnant la durée de vie, en heures, d'un type de composant électrique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}03$.
On a branché ce composant il y a 250 heures et il fonctionne encore.
Calculer la probabilité que ce composant dure encore 100 heures.

1.6. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de mois avant la première panne d'un moteur.
On admet que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}015$.
Quelle est la probabilité que ce moteur ne subisse aucune panne durant les 24 premiers mois ?

1.7. Le temps d'attente à chaque caisse d'un hypermarché, exprimé en minutes, suit une loi exponentielle de paramètre λ .
Le temps d'attente est en moyenne de 2 minutes 30.
Calculer λ .

1.8. L'atome radioactif de carbone 14 a une durée de vie qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}210\times10^{-4}$.
Calculer la probabilité qu'un tel atome se désintègre avant 10 000 ans, sachant qu'il n'a pas été désintégré durant ses 4 000 premières années.

---

2. **2.1.** *Une seule des quatre propositions est exacte.*
Le candidat recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 0,02.
0,45 est une valeur approchée à 10^{-2} près de :

- $P(X = 30)$
- $P(X \leqslant 60)$
- $P(X \leqslant 30)$
- $P(30 \leqslant X \leqslant 40)$

D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2016

2.2. *Quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte.*
Le candidat portera sur la copie la réponse choisie. On ne demande pas de justification.

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires.
Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

a. 0,125

b. 0,25

c. 0,75

d. 0,875

D'après Baccalauréat Métropole Septembre 2015

2.3. *Une seule des quatre affirmations proposées est exacte.*
Le candidat indiquera sur sa copie la lettre correspondant à l'affirmation exacte.
Aucune justification n'est demandée.

Un hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750

b. 0,250

c. 0,472

d. 0,528

D'après Baccalauréat Centres Étrangers 2014

2.4. *Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.*
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.

Affirmation n°1 :
« La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est 0,7 environ. »

Affirmation n°2 :
« Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »

D'après Baccalauréat Polynésie 2014

---

3. On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage, etc).
On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a) On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de λ.

b) On prendra ici $\lambda = 0,1733$.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

D'après Baccalauréat Antilles Septembre 2014

4. *Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à* 10^{-4}.

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module électronique.
L'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}00127$.

b) Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.

c) 1) Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a : $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.

2) Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

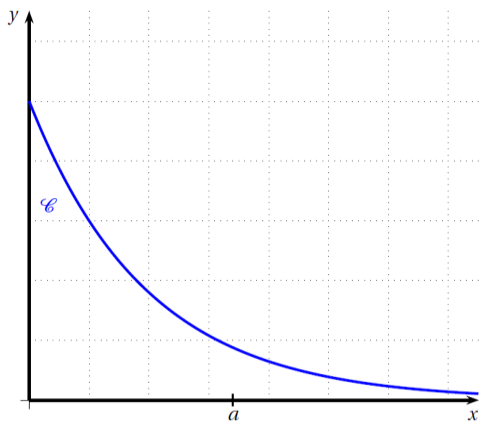
D'après Baccalauréat Amérique du Sud 2016

---

5. La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans une usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T.
On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$.
- pour tout nombre réel $a > 0$, $P(T \leqslant a) = \int_0^a f(x)\,.\,\mathrm{d}x$.

a) La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1) Interpréter graphiquement $P(T \leqslant a)$ où $a > 0$.

2) Montrer que pour tout nombre réel $t > 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

3) En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

b) On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0{,}5$.
Déterminer λ à 10^{-3} près.

c) Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

1) On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

2) On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

3) Donner l'espérance mathématique $\mathrm{E}(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

D'après Baccalauréat Métropole 2016

6. *a)* On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif), alors, pour tout réel positif a , $P(T \leqslant a) = \int_0^a f(x) \,.\, \mathrm{d}x$.

1) Montrer que $P(T > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

2) Montrer que si T suit une loi exponentielle, alors, pour tous les réels positifs t et a , on a $P_{T \geqslant t} (T \geqslant t + a) = P(T \geqslant a)$.

b) Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

1) Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

2) Calculer la probabilité $P(T \geqslant 5\,000)$.

3) Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

D'après Baccalauréat Polynésie 2016

---

7. La durée de vie (exprimée en heures) d'un panneau d'affichage électrique est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

a) Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures ?

b) *Restitution organisée des connaissances*
Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.
On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ , est définie par $\mathrm{E}(T) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda\, t\, \mathrm{e}^{-\lambda t} \,.\, \mathrm{d}t$.

1) On considère la fonction F , définie pour tout réel t par $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda} \right) \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par $f(t) = \lambda\, t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

2) En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau d'affichage électrique ?

D'après Baccalauréat Asie 2015

---

8. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif donné.
On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0 \,;\, +\infty [$ par $f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

a) Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie $P(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$.

b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X .

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0{,}15$.

d) Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.

e) Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 18)$.

D'après Baccalauréat Métropole 2015

9. **Partie A**

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

On rappelle que, pour tout réel a strictement positif, $P(X \leqslant a) = \int_0^a f(t)\,.\,\mathrm{d}t$.
On se propose de calculer l'espérance mathématique de X , notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda\, t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\,.\,\mathrm{d}t\,.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda\, t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

a) Soit x un nombre réel strictement positif.
Vérifier que $\int_0^x \lambda\, t\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\,.\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} + 1\right)$.

b) En déduire que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en annexe ci-dessous.

a) Sur le graphique de l'annexe (à rendre avec la copie) :

1) Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

2) Indiquer où se lit directement la valeur de λ .

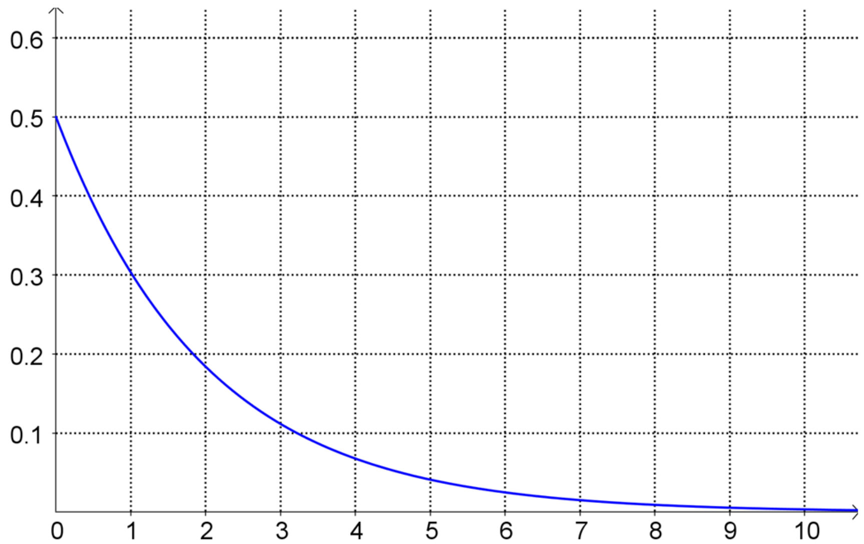
b) On suppose que $E(X) = 2$.

1) Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

2) Calculer la valeur de λ .

3) Calculer $P(X \leqslant 2)$.
On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près.
Interpréter ce résultat.

4) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ?
On donnera la valeur exacte.



D'après Baccalauréat Antilles 2015

10. Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0{,}2$.
Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.
L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

a) Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.

b) Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

c) L'astronome a prévu une sortie de deux heures.
Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

D'après Baccalauréat Polynésie 2016