

Savoir ÉTUDIER UNE OU PLUSIEURS VARIABLES ALÉATOIRES

Ce que je dois avoir compris

• Ce qu'est une variable aléatoire X

- Étant donnée une expérience aléatoire sur un univers fini $\Omega = \{ \omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_N \}$, les issues ω_i peuvent être de nature quelconque.

Par exemple :

Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
On pioche un jeton dans une urne contenant 1 jeton rouge, 5 bleus, 10 verts et 4 jaunes.	On lance un dé cubique.	On lance une pièce équilibrée 10 fois.
Les issues sont des <u>couleurs</u> .	Les issues sont des <u>nombres</u> .	Les issues sont des <u>10-uplets</u> composés dans $\{ \text{pile} ; \text{face} \}$.

- Lorsqu'on associe chaque issue de Ω à un nombre, on définit une fonction $X : \omega_i \mapsto X(\omega_i)$ dite **variable aléatoire**.

Par exemple, on peut définir :

Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
$X_1 : \begin{cases} \text{rouge} \mapsto 10 \text{ €} \\ \text{bleu} \mapsto 4 \text{ €} \\ \text{vert} \mapsto 4 \text{ €} \\ \text{jaune} \mapsto -7 \text{ €} \end{cases}$ où les nombres associés représentent concrètement des gains en €, éventuellement négatifs.	$X_2 : \text{valeur du dé} \mapsto \text{son double}$ Ce double peut rester abstrait ou être concrétisé en un gain en € ou en points, ou autre.	$X_3 : 10\text{-uplet} \mapsto \text{le nombre de pile}$ On reconnaît une situation où X_3 suit une loi binomiale.

• Ce que sont les évènements ($X = k$)

- L'évènement ($X = k$) est réalisé avec toutes les issues ω_i associées à la valeur k .
Sa probabilité $P(X = k)$ vaut la somme des probabilités de toutes ces ω_i .

Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
X_1 prend les valeurs 10, 4 et -7. On a trois évènements ($X_1 = 10$), ($X_1 = 4$) et ($X_1 = -7$). $P(X_1 = 10) = P(\text{rouge}) = \frac{1}{20}$ $P(X_1 = 4) = P(\text{bleu}) + P(\text{vert}) = \frac{5+10}{20}$ $P(X_1 = -7) = P(\text{jaune}) = \frac{4}{20}$	X_2 prend les valeurs entières paires de 2 à 12 (et donc six évènements). Pour chacune de ces valeurs k , $P(X_2 = k) = \frac{1}{6}$ si le dé est équilibré.	X_3 prend les valeurs entières de 0 à 10 (et donc onze évènements). Pour chacune de ces valeurs k , $P(X_3 = k) = \binom{10}{k} 0,5^k (1 - 0,5)^{10-k}$

Donner la liste des $P(X = x_i)$ consiste à **donner la loi de probabilité de X** (souvent sous forme de tableau).

• Ce qu'est une somme de deux variables aléatoires $X + Y$

- On a au départ $\begin{cases} \text{des évènements } \omega_i \text{ d'un premier univers } \Omega \text{ associés à des valeurs par une première variable } X, \\ \text{des évènements } \omega'_j \text{ d'un second univers } \Omega' \text{ associés à des valeurs par une seconde variable } Y. \end{cases}$

Puis, à chaque couple $(\omega_i ; \omega'_j)$ de l'univers $\Omega \times \Omega'$, on associe la somme des valeurs prises par X et par Y .

Cette variable aléatoire $(\omega_i ; \omega'_j) \mapsto X(\omega_i) + Y(\omega'_j)$ est notée $X + Y$.

Expérience 1 suivie de l'expérience 2
Si on pioche un jeton puis on lance le dé, les évènements sont de la forme (couleur ; valeur du dé). On gagne la somme du gain en € de l'expérience 1 et du gain en € de l'expérience 2. On note $Z = X_1 + X_2$ la variable aléatoire qui donne le gain total. Par exemple, $Z : (\text{rouge} ; 3) \mapsto 10 \text{ €} + 6 \text{ €} = 16 \text{ €}$.

Pour ajouter les valeurs de X_2 à celles de X_1 , on est obligé de considérer que X_2 mesure un gain en €.

- Pour **calculer $P(X + Y = k)$** , il faut trouver toutes les manières d'obtenir k avec les valeurs prises par X et Y .
Puis appliquer le principe multiplicatif $P((X = x_i) ; (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$.

Par exemple, ($Z = 16$) est réalisé avec les couples $((X_1 = 10) ; (X_2 = 6))$ et $((X_1 = 4) ; (X_2 = 12))$. Donc $P(Z = 16) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{6} + \frac{15}{20} \times \frac{1}{6}$.
--

Ce que je dois savoir faire

- **Calculer une espérance mathématique**

- 1^{er} cas : Pour une variable aléatoire "artisanale" X sur un univers Ω , prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$E(X) = P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 + \dots + P(X = x_n) \times x_n.$$

Remarque : Si on note p_i la probabilité de chaque $(X = x_i)$, cela s'écrit : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i$.

- 2^{ème} cas : Pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, on a : $E(X) = np$.

Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
$E(X_1) = \frac{1}{20} \times 10 + \frac{15}{20} \times 4 + \frac{4}{20} \times (-7) = 2,1$ qu'on peut exprimer en €.	$E(X_2) = \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 4 + \dots + \frac{1}{6} \times 12 = 7$	$E(X_3) = 10 \times 0,5 = 5$

- 3^{ème} cas : Pour une variable aléatoire X' issue d'une autre variable aléatoire X par opérations.
C'est ce qui se passe quand les événements ω_i sont d'abord associés à des valeurs par X , puis quand ces valeurs sont multipliées par a et augmentées de b .
On a donc $X' : \omega \mapsto X(\omega) \mapsto aX(\omega) + b$ et on note $X' = aX + b$.

$$E(X') = aE(X) + b$$

Remarque : Cette formule $E(aX + b) = aE(X) + b$ s'appelle première propriété de linéarité de l'espérance.

Expérience 1 modifiée
On double les gains mais on fait payer 3 € le droit de jouer : $E(2X_1 - 3) = 2E(X_1) - 3 = 2 \times 2,1 - 3 = 1,2$

- 4^{ème} cas : Pour une variable aléatoire Z somme de deux autres variables aléatoires X et Y : $E(Z) = E(X) + E(Y)$.

Remarque : Cette formule $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ s'appelle deuxième propriété de linéarité de l'espérance.

Expérience 1 suivie de l'expérience 2
Z prend de nombreuses valeurs : $10 + 2, 10 + 4, \dots, 10 + 12, 4 + 2, \dots, 4 + 12, -7 + 2, \dots$ et $-7 + 12$. Le calcul de l'espérance de Z serait donc très fastidieux à calculer "artisanalement". Mais on applique : $E(Z) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 2,1 + 7 = 9,1$.

Remarque : L'utilisation de cette formule nécessite de connaître ou de calculer préalablement $E(X)$ et $E(Y)$.
Or, il peut être parfois aussi rapide ou même plus rapide de calculer $E(Z)$ avec la formule "artisanale" vue dans le 1^{er} cas.

- 5^{ème} cas : En cas de répétition d'une même expérience n fois, on pose les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ où X_i mesure le résultat de la $i^{\text{ème}}$ répétition.
Comme chaque répétition est identique à la première, les espérances $E(X_i)$ sont toutes égales à $E(X_1)$.
On aura alors $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = n \times E(X_1)$.

- **Interpréter une espérance mathématique**

- Réponse à adapter à la situation concrète :
Si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, on peut espérer que X prenne pour valeur moyenne l'espérance à chaque fois.

Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3
Si on pioche un jeton un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne 2,10 € à chaque pioche.	Si on lance le dé un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne 7 € à chaque lancer.	Si on répète les 10 lancers de pièce un grand nombre de fois, on peut espérer avoir en moyenne 5 pile à chaque dizaine de lancers.

Remarque : L'espérance est souvent appelée *moyenne*.

Pour une interprétation concrète, on est obligé de considérer que X mesure un gain, par exemple en €.

- Dans le cas d'un jeu à gain : $\begin{cases} \text{si l'espérance est nulle, le jeu est } \mathbf{\text{équitable}}. \\ \text{si l'espérance est positive, le jeu est } \mathbf{\text{favorable au joueur}}. \\ \text{si l'espérance est négative, le jeu est } \mathbf{\text{défavorable au joueur}}. \end{cases}$

• **Calculer une variance et un écart type**

- 1^{er} cas : Pour une variable aléatoire "artisanale" X sur un univers Ω , prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$V(X) = P(X = x_1) \times (x_1 - E(X))^2 + P(X = x_2) \times (x_2 - E(X))^2 + \dots + P(X = x_n) \times (x_n - E(X))^2 .$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque : La formule de la variance est la même formule que pour l'espérance en remplaçant les valeurs x_i par les écarts quadratiques à l'espérance $(x_i - E(X))^2$.

Remarque : Ces deux valeurs mesurent la dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$.

Mais $V(X)$ est exprimée dans le carré de l'unité de X alors que $\sigma(X)$ est dans la même unité que X .

- 2^{ème} cas : Pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, on a :

$$\begin{cases} V(X) = n p (1-p) \\ \sigma(X) = \sqrt{n p (1-p)} \end{cases}$$

Expérience 1	Expérience 3
$V(X_1) = \frac{1}{20} \times (10 - 2,1)^2 + \frac{15}{20} \times (4 - 2,1)^2 + \frac{4}{20} \times (-7 - 2,1)^2 = 22,39$ qu'on peut exprimer en carré d'euros.	$V(X_3) = 10 \times 0,5 \times (1 - 0,5) = 2,5$
$\sigma(X_1) = \sqrt{22,39} \approx 4,73$ qu'on peut exprimer en €.	$\sigma(X_3) = \sqrt{2,5} \approx 1,58$

- 3^{ème} cas : Pour une variable aléatoire issue d'une autre variable aléatoire X par opérations.

$$\begin{cases} V(aX) = a^2 V(X) \\ V(X + b) = V(X) \end{cases} \text{ et donc } V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$\begin{cases} \sigma(aX) = a \sigma(X) \\ \sigma(X + b) = \sigma(X) \end{cases} \text{ et donc } \sigma(aX + b) = a \sigma(X)$$

Remarque : On retiendra logiquement que $\begin{cases} \text{si on multiplie les valeurs, la dispersion est aussi multipliée} \\ \text{si on ajoute une constante aux valeurs, la dispersion ne change pas.} \end{cases}$

Expérience 1 modifiée
$\sigma(2X_1 - 3) = 2 \sigma(X_1) \approx 2 \times 4,73 = 9,46$

- 4^{ème} cas : Pour une variable aléatoire Z somme de deux autres variables aléatoires X et Y **indépendantes** (c'est-à-dire associées à deux épreuves aléatoires indépendantes).

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Remarque : Attention à l'écart type : $\sigma(X + Y)$ se calcule avec $\sqrt{V(X + Y)}$.

Mais ce n'est pas égal à $\sigma(X) + \sigma(Y)$ car $\sqrt{V(X)} + \sqrt{V(Y)} \neq \sqrt{V(X) + V(Y)}$.

Expérience 1 suivie de l'expérience 2
Piocher un jeton et lancer le dé sont des épreuves aléatoires indépendantes, donc : $V(Z) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 22,39 + 2,5 = 24,89 .$ $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{24,89} \approx 4,99 .$

Remarque : Comme pour l'espérance, il peut être plus rapide de calculer $V(Z)$ avec la formule "artisanale" vue dans le 1^{er} cas.

- 5^{ème} cas : En cas de répétition d'une même expérience n fois de manière indépendante, on pose les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ où X_i mesure le résultat de la $i^{\text{ème}}$ répétition.

Comme chaque répétition est identique à la première, les espérances $V(X_i)$ sont toutes égales à $V(X_1)$.

Et comme les répétitions sont indépendantes : $V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = n \times V(X_1)$.

 Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont "identiques" : $\begin{cases} \text{elles mesurent le même résultat} \\ \text{durant la même expérience aléatoire} \\ \text{et suivent la même loi.} \end{cases}$

Mais il ne faut pas les nommer avec une même lettre X .

En effet, $V(X + X + \dots + X)$ deviendrait $V(nX)$ et donc $n^2 \times V(X)$, qui n'est pas égal à $n \times V(X_1)$.

• **Interpréter la comparaison de deux variances ou deux écarts types**

- Si $V(X) < V(Y)$ (ou, c'est équivalent, si $\sigma(X) < \sigma(Y)$), on dira que les valeurs prises par X sont moins dispersées que celles prises par Y .
- Dans le cas d'un jeu à gain : $\begin{cases} \text{plus l'écart type est grand, plus on peut gagner beaucoup ou perdre beaucoup,} \\ \text{plus l'écart type est petit, plus on peut gagner peu ou perdre peu.} \end{cases}$
On dit que l'écart type mesure le **risque à jouer**.

Remarques sur les exercices

- Les exercices ① à ③ permettent de comparer les calculs d'espérances et de variances avec les formules "artisanales" des 1^{ers} cas ou avec la linéarité.
- Les exercices ④ à ⑥ sont des petits exercices calculatoires utilisant les formules.
- Les exercices ⑦ et ⑧ présentent des répétitions d'une même expérience.
On pourra poser les variables successives $X_1, X_2, \dots, X_n$ où X_i mesure le résultat de la $i^{\text{ème}}$ répétition.
- Les exercices ⑩ et ⑪ sont des situations concrètes où s'appliquent les techniques précédentes.

- ① On lance deux dés non truqués, un cubique et un tétraédrique.
On note X et Y les variables aléatoires qui donnent la valeur respectivement du dé cubique et du dé tétraédrique.
On pose la variable aléatoire $Z = X + Y$.

1. Calculer $P(Z = 2)$, $P(Z = 3)$ et $P(Z = 4)$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de Z .
La variance sera arrondie au centième.

- ② Une urne contient trois jetons rouges avec un numéro 0 et deux jetons bleus avec un numéro 1.
On tire au hasard deux jetons avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire qui donne le numéro du premier jeton tiré, et X_2 la variable aléatoire qui donne le numéro du second jeton tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X_1 + X_2$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de Z .

- ③ Même exercice que le précédent mais avec un tirage de deux jetons sans remise.

- ④ Une variable aléatoire X prend pour valeurs 1, 2 et 3 et elle est telle que $P(X = 1) = 0,2$ et $P(X = 2) = 0,3$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = 3X$.

- ⑤ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'écarts types respectifs 3 et 4.
Déterminer l'écart type de $X + Y$, la variance de $2X - Y$ et la variance de $-3X + 1$.

- ⑥ Soit une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ (c'est-à-dire que les sept valeurs sont équiprobables) et une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{4}$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire $X + Y$?
2. Calculer $E(X + Y)$.

- ⑦ On lance un dé équilibré 10 fois de suite. On gagne chaque fois une somme en euros égale au numéro de la face du dé.
Calculer l'espérance et l'écart type de G la variable aléatoire qui, à cette expérience, associe le gain total en euros.
L'écart type sera arrondi au centième.

- ⑧ Soit une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$.
On pose X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
- Donner la loi de probabilité de X et en déduire son espérance et sa variance.
 - On répète cette expérience de Bernoulli 100 fois de manières indépendantes.
Calculer l'espérance et la variance du nombre total de succès.
 - Refaire la question 2. dans le cas d'un paramètre p quelconque et d'un entier n quelconque.

- ⑨ Une entreprise vend des machines dans deux magasins.
Pour le premier magasin, situé en zone rurale, on note M_1 la variable aléatoire qui, pour un mois choisi au hasard, associe le nombre de machines vendues pendant cette période.
Une étude statistique permet d'établir la loi de probabilité de M_1 :

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,04	0,08	0,12	0,28	0,25	0,17	0,06

- Calculer l'espérance de M_1 .
- La vente d'une machine rapporte 5 000 €. On note R_1 la variable aléatoire qui, à un mois tiré au hasard, associe le résultat en euros du premier magasin.
Déterminer l'espérance de R_1 , puis l'interpréter.
- Pour le second magasin, situé en zone urbaine, le résultat mensuel R_2 , en euros, est en moyenne quatre fois supérieur à celui du premier magasin.
Quelle est l'espérance du résultat mensuel total de l'entreprise ?

- ⑩ Un promoteur a observé pendant plusieurs mois le nombre d'appartements vendus.
Il a établi la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui, à un mois donné, associe le nombre n d'appartements vendus :

n	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = n)$	0,02	0,08	0,3	0,25	0,15	0,12	0,08

Il a d'autre part constaté que les ventes des mois successifs étaient indépendantes.

- ✍ 1. Calculer l'espérance et l'écart type du nombre annuel d'appartements vendus.
2. L'agence touche 1 000 € pour la vente d'un appartement et les charges fixes annuelles s'élèvent à 15 000 €. Calculer l'espérance et l'écart type du bénéfice annuel de l'agence, arrondis à 1 € près.