

Savoir ÉTUDIER DES SUITES AVEC DES MATRICESRemarques sur les exercices

- L'exercice ① étudie le comportement de deux suites (r_n) et (c_n) récurrentes croisées : r_{n+1} est exprimé en fonction de r_n et de c_n et c_{n+1} est aussi exprimé en fonction de r_n et de c_n .
Vous découvrirez la notion de matrice de transition qui permet de gérer les deux suites en même temps.
Les exercices ② et ③ sont similaires.
- L'exercice ④, assez court, utilise des matrices pour étudier une suite récurrente double : u_{n+1} est exprimé en fonction de u_{n+1} et de u_n .
- L'exercice ⑤ est un long problème où on étudie la suite de Fibonacci, définie par une réurrence double.
On retrouve des questions d'arithmétique en fin de problème.

① Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville.

Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n , on note :

- r_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$,
- c_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$.

On a donc $r_0 = 90$ et $c_0 = 30$.

1. On peut exprimer r_{n+1} en fonction de r_n et de c_n avec $r_{n+1} = 0,9r_n + 0,05c_n$.
Exprimer de même c_{n+1} en fonction de r_n et de c_n .
2. On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n > 0$.
Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0 .
La matrice A est appelée **matrice de transition** de U_{n+1} à U_n .
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, $U_n = A^n \times U_0$.
4. a. À la calculatrice, donner un arrondi de A^5 en arrondissant les coefficients au millièmè.
b. En déduire un arrondi de U_5 et en donner une interprétation concrète.
5. a. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P . On la notera P^{-1} .
b. On pose $D = P^{-1} A P$.
Calculer D à l'aide de la calculatrice.
c. Démontrer que $A = P D P^{-1}$.
d. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $A^n = P D^n P^{-1}$.
6. a. Donner sans justification la matrice D^n en fonction de n .
b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $r_n = 50 \times 0,85^n + 40$.
Déterminer de même l'expression de c_n en fonction de n .
c. Déterminer la limite de r_n et de c_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?
d. Déterminer à partir de quelle année la population urbaine aura dépassé la population rurale.

- ② Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle.

Il existe deux types de cartes de pêche :

- une d'abonné (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte bridée (le pêcheur est limité en nombre de poissons pêchés).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.

On note, pour l'année $2017+n$:

- a_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche d'abonné ;
- b_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche bridée.

On observe chaque année que :

- 65 % des possesseurs de la carte de pêche d'abonné achètent de nouveau une carte de pêche d'abonné l'année suivante ;
- 45 % des possesseurs de la carte de pêche bridée achètent une carte de pêche d'abonné l'année suivante.

En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche d'abonné.

On a donc $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Pour tout entier naturel n , on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

En déduire que $P_{n+1} = MP_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$.

2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche bridée en 2019.

3. On définit la matrice carrée $Q = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$.

a. En utilisant la calculatrice, donner la valeur des produits QT et TQ , où T est la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$.

b. En déduire que Q est une matrice inversible et donner sa matrice inverse Q^{-1} .

4. a. Montrer que $Q^{-1}MQ$ est une matrice D diagonale qu'on précisera.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $M^n = QD^nQ^{-1}$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $M^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix}$.

5. a. Pour tout entier naturel n , donner sans justification l'expression de P_n en fonction de M et P_0 .

b. En déduire les expressions explicites de a_n et b_n .

D'après Baccalauréat Antilles-Guyane 2018

- ③ Parmi les 500 ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité.

Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains.

On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n , on note a_n le nombre d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n le nombre d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.

Ainsi $a_0 = 200$ et $b_0 = 300$.

Partie A

1. Déterminer a_1 et b_1 .

2. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,07 \\ 0,03 & 0,93 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que pour tout entier naturel n , on a $X_{n+1} = AX_n$.

b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

c. À l'aide de la calculatrice, calculer A^{20} en arrondissant les coefficients au millièmes.

En déduire un arrondi de X_{20} et en donner une interprétation concrète dans le cadre du problème.

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 35 \\ 15 \end{pmatrix}$.

On rappelle que, pour tout entier naturel n , $a_n + b_n = 500$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = DX_n + B$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $Y_n = X_n - 10B$.

a. Calculer la matrice $10D$.

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $Y_{n+1} = DY_n$.
- c. On admet que, pour tout entier naturel n , $Y_n = D^n Y_0$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B$.
- d. Donner l'expression de D^n , puis en déduire a_n et b_n en fonction de n .
3. Selon cette étude, que peut-on dire du nombre d'ordinateurs défectueux sur le long terme ?

D'après Baccalauréat Antilles-Guyane Septembre 2016

④ On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} = AU_n$.
3. On considère de plus les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $A^n = 2^n B + 4^n C$.
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n = A^n U_0$.
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 2 \times 4^n - 2^n$.

⑤ On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier naturel.

1.
 - a. Calculer les termes de la suite de Fibonacci jusqu'à u_7 .
 - b. Dessiner les 13 spirales qui tournent dans le sens direct $\curvearrowright$ à la base d'une pomme de pin.
Compter les spirales qui tournent dans le sens indirect $\curvearrowleft$ à la base d'une pomme de pin.
Quelle remarque peut-on faire ?

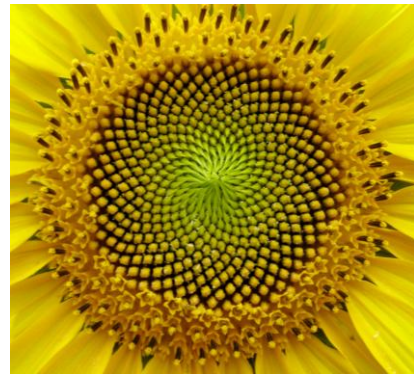
Faire de même avec les spirales d'un brocoli romanesco, puis avec les spirales du cœur d'une fleur de tournesol.
Quelle remarque peut-on faire ?



Le cœur d'une fleur de tournesol



Un brocoli romanesco



Le cœur d'une fleur de tournesol

- c. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution il affiche le terme u_n .
- ```

a = 0
b = 1
for k in range(n) :
 c = a+b
 a = ...
 b = ...
print(...)

```
- d. Déterminer la valeur de  $u_{12}$ .
2. On considère la matrice  $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- a. Calculer  $F^2$ ,  $F^3$  et  $F^4$ .
  - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$ .

3. a. Soit  $n$  un entier naturel non nul. En remarquant que  $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n$ , démontrer que  $u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n$ .
- b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2$ .
- c. On donne  $u_{12} = 144$ .  
Démontrer qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.  
Donner la longueur des deux autres côtés.
4. a. Soit  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls.  
Calculer le produit  $F^p \times F^q$  et en déduire que  $u_{p+q} = u_p \times u_{q+1} + u_{p-1} \times u_q$ .
- b. En déduire que si un entier  $r$  divise les entiers  $u_p$  et  $u_q$ , alors  $r$  divise également  $u_{p+q}$ .
- c. Soit  $p$  un entier naturel non nul.  
Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur  $n$ , que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_p$  divise  $u_{np}$ .
- d. Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 5.  
Montrer que si  $m$  est un entier naturel qui n'est pas premier, alors  $u_m$  n'est pas un nombre premier.
- e. Calculer  $u_{19}$ .  
Que penser de la réciproque de la propriété obtenue dans la question d. ?