Correction de **POLYNÔMES - Fiche 2**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭

① **1.** Pour passer de la forme développée à la forme canonique, je dois faire apparaître une identité remarquable :

$2x^2 - 20x + 53 = 2\left(x^2 - 10x + \frac{53}{2}\right)$ → Je factorise tout par le coefficient dominant 2 (même 53 en forçant la factorisation).

$= 2\left(x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2 - 5^2 + \frac{53}{2}\right)$ → $\begin{cases}\text{Je décompose } 10x \text{ pour faire apparaître } 5 \text{ qui joue le rôle de } B \text{ dans } A^2 - 2AB + B^2\\ \text{J'ajoute le carré de } 5 \text{ pour faire apparaître } B^2\\ \text{Je compense en soustrayant le carré de } 5\,.\end{cases}$

$= 2\left[(x-5)^2 + \frac{3}{2}\right]$ → J'applique l'identité remarquable en écrivant $(A-B)^2$ et je calcule ce qui reste.

$= 2(x-5)^2 + 3$ → Je distribue 2.

2. Pour passer de la forme développée à la forme factorisée, il me faut les racines :

$\Delta = 11^2 - 4\times4\times(-3) = 168 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\frac{-11+\sqrt{169}}{2\times4} = \frac{1}{4}$ et $\frac{-11-\sqrt{169}}{2\times4} = -3$

donc, $4x^2 + 11x - 3$ s'écrit sous forme factorisée $4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x+3) = (4x-1)(x+3)$.

3. $x^2 + 22x + 120 = x^2 - 2\times x\times 11 + 11^2 - 11^2 + 120$ → Pas besoin de factorisation par le coefficient dominant.

$= (x-11)^2 - 1$ → Et c'est déjà fini !

4. $\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times(-3) = -8 < 0$

Donc, il n'y a pas de racine et $-x^2 + 2x - 3$ n'est pas factorisable.

5. Pour passer de la forme canonique à la forme factorisée, il va falloir factoriser par le coefficient dominant puis, si c'est possible, factoriser une seconde fois avec une identité remarquable :

$2(x+11)^2 - 50 = 2\left[(x+11)^2 - 25\right]$ → Je mets 2 en facteur.

$= 2\left[(x+11)^2 - 5^2\right]$ → Je fais apparaître $A^2 - B^2$.

$= 2(x+11-5)(x+11+5)$ → J'applique $(A-B)(A+B)$.

$= 2(x+6)(x+16)$ → Je réduis.

6. $-5x^2 - 10x - 20 = -5(x^2 + 2x + 4)$

$= -5(x^2 + 2\times x\times 1 + 1^2 - 1^2 + 4)$

$= -5\left[(x+1)^2 + 3\right]$

$= -5(x+1)^2 - 15$

7. $3x^2 + x + 1 = 3\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)$

$= 3\left[x^2 + 2\times x\times\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\right]$ → Car $\frac{1}{3}$, c'est 2 fois $\frac{1}{6}$.

$= 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} + \frac{12}{36}\right]$

$= 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right]$

$= 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}$

8. $10(x-3)^2 - 11 = 10(x^2 - 6x + 9) - 11$ → Ben, il suffit de... développer...

$= 10x^2 - 60x + 90 - 11$

$= 10x^2 - 60x + 79$

9. $-3(x+2)^2 - 75 = -3\left[(x+11)^2 + 25\right]$ → Attention au signe de 25 dans les crochets...

On voit qu'on a $A^2 + B^2$ au lieu de $A^2 - B^2$ et qu'on ne va pas pouvoir appliquer une identité remarquable.

C'est qu'on ne pourra pas factoriser...

Mais pour le justifier proprement, calculons le discriminant après avoir développé :

$= -3(x^2 + 22x + 121 + 25)$

$= -3(x^2 + 22x + 146)$

$\Delta = 22^2 - 4\times1\times146 = -100 < 0$

Donc, il n'y a pas de racine et $-3(x^2 + 22x + 146)$ n'est pas plus factorisable.

② *Les trois premiers polynômes sont sous forme développée et se traiteront de la même manière.*

1. ◆ L'abscisse du sommet est $-\dfrac{-12}{2\times 3} = 2$.

L'ordonnée du sommet est $P_1(2) = 3\times 2^2 - 12\times 2 - 36 = -48$.

Le coefficient dominant 3 est positif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de P_1		↘	-48	↗	

◆ $\Delta = (-12)^2 - 4\times 3\times(-36) = 576 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-(-12)+\sqrt{576}}{2\times 3} = 6$ et $\dfrac{-(-12)-\sqrt{576}}{2\times 3} = -2$.

Le coefficient dominant 3 est positif, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
Signes de $P_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

---

2. ◆ L'abscisse du sommet est $-\dfrac{5}{2\times(-0,5)} = 5$.

L'ordonnée du sommet est $Q(5) = -0,5\times 5^2 + 5\times 5 - 22,5 = -10$.

Le coefficient dominant $-0,5$ est négatif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Variations de Q		↗	-10	↘	

◆ *1ère méthode pour le tableau de signes : On a le réflexe de chercher les racines avec le discriminant...*

$\Delta = 5^2 - 4\times(-0,5)\times(-22,5) = -20 < 0$

Donc, il n'y a pas de racine et le polynôme est de signe constant.

Le coefficient dominant $-0,5$ est négatif, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $Q(x)$	$-$	

2ème méthode pour le tableau de signes : ... Mais ici, le tableau de variations donne toutes les informations !

D'après le tableau de variations, le maximum de Q est -10

donc le polynôme est toujours de signe négatif.

Le tableau de signes est le même.

Il est presque inutile... Mais si on le demande...

---

3. ◆ L'abscisse du sommet est $-\dfrac{-0,4}{2\times 0,05} = 0,05$.

L'ordonnée du sommet est $P_2(0,05) = 0,05\times 0,05^2 - 0,4\times 0,05 + 0,8 = 0$.

Le coefficient dominant $0,05$ est positif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		$0,05$		$+\infty$
Variations de P_2		↘	0	↗	

◆ *1ère méthode pour le tableau de signes : Avec les racines et le discriminant...*

$\Delta = (-0,4)^2 - 4\times 0,05\times 0,8 = 0$

Donc, il y a une racine qui est $-\dfrac{-0,4}{2\times 0,05} = 0,05$.

Le coefficient dominant $0,05$ est positif, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$0,05$		$+\infty$
Signes de $P_1(x)$		$+$	0	$+$	

2ème méthode pour le tableau de signes : ... Avec le tableau de variations qui, là aussi, donne toutes les informations !

D'après le tableau de variations, le tableau de signes est ...

On peut donc donner directement le tableau, sans oublier de préciser qu'on le déduit du tableau de variations...

---

4. Le polynôme est donné sous forme factorisée.
Vous pouvez très bien le développer sous la forme $-x^2 + 200x - 10\ 000$ et utiliser les techniques vues précédemment.

Essayons autrement en tirant parti de cette forme factorisée très particulière.
Car c'est aussi une forme canonique ! En effet, on peut l'écrire $-(x - 100)^2 + 0$.

- D'après la forme canonique de l'expression, le sommet a pour coordonnées $(100\ ;\ 0)$.
  Le coefficient dominant -1 est négatif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		100		$+\infty$
Variations de g		$\nearrow$	0	$\searrow$	

- 1ère méthode pour le tableau de signes : Avec le tableau de variations qui donne toutes les informations
  D'après le tableau de variations, le tableau de signes est :

x	$-\infty$		100		$+\infty$
Signes de $g(x)$		$-$	0	$-$	

  2ème méthode pour le tableau de signes : En utilisant l'expression
  $-(x - 100)^2 = 0$
  $\Leftrightarrow\ x - 100 = 0$
  $\Leftrightarrow\ x = 100$
  Donc, il y a une racine qui est 100 .
  De plus, un carré est toujours positif ou nul,
  donc $-(x - 100)^2$ est toujours négatif ou nul,
  donc le tableau de signes est ...

---

5. On retrouve une forme développée qui sera juste pénible à cause des fractions...
On repère que $a = -\dfrac{1}{30}$, $b = \dfrac{8}{3}$ et $c = 40$.

- L'abscisse du sommet est $-\dfrac{\frac{8}{3}}{2\times(-\frac{1}{30})} = -\dfrac{8}{3} \times (-\dfrac{30}{2}) = 40$. → Le calcul n'est pas élémentaire, on peut le détailler un peu.

  L'ordonnée du sommet est $P_3(40) = \dfrac{-40^2}{30} + \dfrac{8\times 40}{3} + 40 = -\dfrac{160}{3} + \dfrac{320}{3} + \dfrac{120}{3} = \dfrac{280}{3}$. → Celui-là aussi...

  Le coefficient dominant $-\dfrac{1}{30}$ est négatif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		40		$+\infty$
Variations de P_3		$\nearrow$	$\dfrac{280}{3}$	$\searrow$	

- $\Delta = (\dfrac{8}{3})^2 - 4\times(-\dfrac{1}{30})\times 40 = \dfrac{112}{9} > 0$ → Pas très sympathique !

  Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-\frac{8}{3} + \sqrt{\frac{112}{9}}}{2\times(-\frac{1}{30})} = (-\dfrac{8}{3} + \dfrac{4\sqrt{7}}{3})\times(-15) = 40 - 20\sqrt{7}$ et $\dfrac{-\frac{8}{3} - \sqrt{\frac{112}{9}}}{2\times(-\frac{1}{30})} = 40 + 20\sqrt{7}$.

  1ère explication : $\sqrt{\dfrac{112}{9}} = \dfrac{\sqrt{2\times2\times2\times2\times7}}{\sqrt{9}} = \dfrac{4\sqrt{7}}{3}$.

  2ème explication : diviser par $2\times(-\dfrac{1}{30}) = -\dfrac{1}{15}$, c'est multiplier par -15 .

  Le coefficient dominant $-\dfrac{1}{30}$ est négatif, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$40 - 20\sqrt{7}$		$40 + 20\sqrt{7}$		$+\infty$
Signes de $P_3(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

---

6. Le polynôme est donné sous forme factorisée mais pas très gentille...
Le plus sûr est peut-être d'utiliser la forme développée.
Mais voyons ce qu'on peut faire de cette forme factorisée...

- Pour les coordonnées du sommet sans développer, le plus rapide est de trouver les racines :
  $-3(2x + 3)(1 - x) = 0$
  $\Leftrightarrow\ 2x + 3 = 0$ ou $1 - x = 0$
  $\Leftrightarrow\ x = -1{,}5$ ou $x = 1$
  Donc, il y a deux racines qui sont $-1{,}5$ et 1 .

L'abscisse du sommet est la moyenne des racines $\dfrac{-1{,}5+1}{2} = -0{,}25$.

L'ordonnée du sommet est $f(-0{,}25) = -3\ [\ 2\times(-0{,}25) + 3\ ]\ [\ 1 - (-0{,}25)\ ] = -9{,}375$.

Le coefficient dominant ... *Ah, c'est là qu'il faut faire attention ! Le coefficient dominant n'est pas 3 ... À cause des deux facteurs qui ne sont pas sous la forme $(x - \ldots)$.*

Et pour trouver ce coefficient dominant, il faut développer...

$-3\,(2x+3)\,(1-x) = -3\,(2x - 2x^2 + 3 - 3x)$

$= 6x^2 + 3x - 9$.

Le coefficient dominant 6 est positif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$	$-0{,}25$	$+\infty$
Variations de g	↗	$-9{,}375$	↘

- Le coefficient dominant 6 est positif, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$-1{,}5$		1		$+\infty$
Signes de $g(x)$		+	0	–	0	+	

③ *Lorsqu'on vous demande l'extremum, ce n'est rien d'autre que l'ordonnée du sommet de la parabole.*
Et la valeur en laquelle il est atteint, c'est l'abscisse du sommet.

1.
- $f(x)$ a pour forme développée $3x^2 - 9x + 7$,
  donc l'extremum de f est atteint en $-\dfrac{-9}{2\times3} = 1{,}5$. → *Je montre l'expression $-\dfrac{b}{2a}$ directement avec les valeurs numériques.*
- L'extremum vaut $f(1{,}5) = 3\times1{,}5^2 - 9\times1{,}5 + 7 = 0{,}25$.
- Le coefficient dominant 3 est positif,
  donc la fonction est décroissante puis croissante
  et donc l'extremum est un minimum.

On trouve généralement l'abscisse en premier...

2.
- $G(x)$ a pour forme factorisée $9\,(x-15)\,(x+8)$,
  donc $G(x)$ a deux racines 15 et -8 .
  L'extremum de G est atteint en la moyenne des deux racines, donc en $\dfrac{15+(-8)}{2} = 3{,}5$.
- Il vaut $G(3{,}5) = 9\,(3{,}5-15)\,(3{,}5+8) = 1\ 190{,}25$.
- Le coefficient dominant 9 est positif,
  donc la fonction est décroissante puis croissante
  et donc l'extremum est un minimum.

Là aussi, on trouve l'abscisse en premier...

3.
- $P(x)$ a pour forme canonique $5\,(x+2)^2 - 7$
  donc l'extremum de P vaut 7 et il est atteint en -2 . → *La forme canonique donne les deux valeurs en même temps.*
- Le coefficient dominant 5 est positif,
  donc la fonction est décroissante puis croissante
  et donc l'extremum est un minimum.

4.
- $g(x)$ a pour forme développée $1 + 2x - x^2$, → *Attention ! Vous avez remarqué qu'on vous a mélangé les termes ?*
  donc l'extremum de g est atteint en $-\dfrac{2}{2\times(-1)} = -1$. → *Et que $a = -1$?*
- L'extremum vaut $g(-1) = 1 + 2\times(-1) - (-1)^2 = 0{,}25$.
- Le coefficient dominant -1 est négatif,
  donc la fonction est croissante puis décroissante
  et donc l'extremum est un maximum.

5.
- $\psi(x)$ a pour forme factorisée $-150\,(x+0{,}5)^2$,
  donc $\psi(x)$ a une seule racine $-0{,}5$, → *Je visualise la parabole qui touche l'axe des abscisses en un seul point.*
  donc l'extremum de ψ est atteint en $-0{,}5$.
- Il vaut $\psi(-0{,}5) = 0$. → *Puisque $-0{,}5$ est la racine.*
- Le coefficient dominant -150 est négatif,
  donc la fonction est croissante puis décroissante
  et donc l'extremum est un maximum.

Remarquons que $-150\,(x+0{,}5)^2$ peut être vue comme la forme canonique $-150\,(x+0{,}5)^2$ avec $\alpha = -0{,}5$ et $\beta = 0$.
Ce qui confirme plus rapidement ce qu'on vient d'écrire.

6.
- $R(x)$ a pour forme canonique $-0{,}2\,(x-2{,}5)^2 - 0{,}01$
  donc l'extremum de R vaut $-0{,}01$ et est atteint en $2{,}5$.
- Le coefficient dominant $-0{,}2$ est négatif,
  donc la fonction est croissante puis décroissante
  et donc l'extremum est un maximum.

④ Trouver l'abscisse des éventuels points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses, c'est trouver les racines (ou les solutions de l'équation polynôme = 0).

1. $\Delta = 6^2 - 4\times(-1)\times(-10) = -4 < 0$
Donc, il n'y a pas de racine,
donc, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses. → Ça commence bien !

2. 1ère méthode : par résolution d'équation
$2(x+5)^2 - 18 = 0$
$\Leftrightarrow (x+5)^2 - 9 = 0$ → Je divise les deux termes et 0 par 2 .
$\Leftrightarrow (x+5-3)(x+5+3) = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)(x+8) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -8$
Donc, la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points de coordonnées $(-2\,;0)$ et $(-8\,;0)$. → Pas besoin de calculer les ordonnées !

2ème méthode : en développant pour trouver les racines avec Δ

$2(x+5)^2 - 18 = 2(x^2 + 10x + 25) - 18$
$= 2x^2 + 20x + 50 - 18$
$= 2x^2 + 20x + 38$

$\Delta = 20^2 - 4\times2\times38 = 144 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-20+\sqrt{144}}{2\times2} = -2$ et $\dfrac{-20-\sqrt{144}}{2\times2} = -8$.

Donc, ... Même conclusion...

3. $5(x+6)(x-8) = 0$
$\Leftrightarrow x = -6$ ou $x = 8$
Donc, la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points de coordonnées $(-6\,;0)$ et $(8\,;0)$.

4. $\Delta = 54^2 - 4\times(-16)\times(-35) = 676 > 0$
Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-54+\sqrt{676}}{2\times(-16)} = \dfrac{7}{8}$ et $\dfrac{-54-\sqrt{676}}{2\times(-16)} = \dfrac{5}{2}$.
donc, la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points de coordonnées $(\frac{7}{8}\,;0)$ et $(\frac{5}{2}\,;0)$.

5. $-\frac{1}{3}(x+6)(x-2{,}5) = 0$
$\Leftrightarrow x = -6$ ou $x = 2{,}5$
donc, la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points de coordonnées $(-6\,;0)$ et $(2{,}5\,;0)$.

6. 1ère méthode : par résolution d'équation
$10(x-1)^2 + 30 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3 = 0$ → Je divise les deux termes et 0 par 10 .
$\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3}) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1+\sqrt{3}$ ou $x = 1-\sqrt{3}$
Donc, la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points de coordonnées $(1+\sqrt{3}\,;0)$ et $(1-\sqrt{3}\,;0)$.
2ème méthode : en développant pour trouver les racines avec Δ

---

⑤

- Sur la courbe $\mathscr{C}_1$, on voit clairement les coordonnées du sommet $(-2\,;-3)$ (les racines sont douteuses).
Donc je choisis la forme canonique :
$P_1(x) = 2(x+2)^2 - 3$.
- Sur la courbe $\mathscr{C}_2$, on voit clairement les deux racines -2 et 1 (les coordonnées du sommet sont douteuses).
Donc je choisis la forme factorisée :
$P_2(x) = 2(x+2)(x-1)$.
- Sur la courbe $\mathscr{C}_3$, on voit clairement les coordonnées du sommet $(1\,;0)$.
Donc je peux choisir la forme canonique :
$P_3(x) = 2(x-1)^2 + 0$.
Mais l'abscisse du sommet est également la racine.
Je peux aussi choisir la forme factorisée :
$P_2(x) = 2(x+2)^2$. ... qui est exactement la même que la forme canonique !
- Sur la courbe $\mathscr{C}_4$, on voit clairement les deux racines 1 et 4 (les coordonnées du sommet sont douteuses).
Donc je choisis la forme factorisée :
$P_2(x) = 2(x-1)(x-4)$.
- Sur la courbe $\mathscr{C}_5$, on voit clairement les coordonnées du sommet $(3\,;-1)$ (les racines sont douteuses).
Donc je choisis la forme canonique :
$P_1(x) = 2(x-3)^2 - 1$.

- *Sur la courbe $\mathscr{C}_6$, on voit clairement les coordonnées du sommet $(5\,;1)$.*
  Les racines ne sont pas douteuses… Il n'y en a pas ! Il n'y a donc pas de forme factorisée.
  Donc je suis obligé de choisir la forme canonique :
  $P_1(x) = 2\,(x-5)^2 + 1$.

---

⑥ **a.** $\begin{cases} -\dfrac{3}{2\times(-2)} = \dfrac{3}{4} \\ f\left(\dfrac{3}{4}\right) = -2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + 3\times\dfrac{3}{4} - 1 = \dfrac{1}{8} \end{cases}$

donc les coordonnées du sommet sont $\left(\dfrac{3}{4}\,;\dfrac{1}{8}\right)$.

b. D'après la question **a.**, l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = \dfrac{3}{4}$.

c. Le coefficient dominant -2 est négatif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		$3/4$		$+\infty$
Variations de f		↗	$\frac{1}{8}$	↘	

d. $\Delta = 3^2 - 4\times(-2)\times(-1) = 1 > 0$

Donc, il y a deux racines qui sont $\dfrac{-3+\sqrt{1}}{2\times(-2)} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{1}}{2\times(-2)} = 1$.

e. Le coefficient dominant -2 est négatif, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
Signes de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

---

⑦ **a.** $\begin{cases} -\dfrac{-6}{2\times2} = \dfrac{3}{2} \\ g_1\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 6\times\dfrac{3}{2} + 8 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

donc les coordonnées de S_1 sont $\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

b. Le coefficient dominant 2 est positif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
Variations de g_1		↘	$\frac{1}{2}$	↗	

c. *Attention, il ne faut pas partir à la recherche des racines avec le discriminant car on vous demande de <u>les déduire</u> de la question précédente !*

D'après le tableau de variations, la fonction g_1 a pour minimum $\dfrac{1}{2}$

donc, elle est toujours strictement positive et n'a pas de racine.

d. $\begin{cases} -\dfrac{0}{2\times1} = 0 \\ g_2(0) = 0^2 - 4 = -4 \end{cases}$

donc les coordonnées de S_2 sont $(0\,;-4)$.

e. Le coefficient dominant 1 est positif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de g_2		↘	-4	↗	

f. *Il faut d'abord les racines… Et j'ai repéré une forme bien connue…*

$x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ → *Équation carré.*

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Donc, les racines de g_2 sont 2 et -2.

Le coefficient dominant 1 est positif, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signes de $g_2(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

> *On pouvait aussi utiliser une identité remarquable :*
> $x^2 - 4 = 0$
> $\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0$
> $\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

g. Points d'intersection ? On pense à résoudre l'équation $g_1(x) = g_2(x)$:

$2x^2 - 6x + 5 = x^2 - 4$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

Ici, faites comme vous voulez... Utilisez le discriminant ou repérez que c'est l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2$.
Dans les deux cas, avec $\Delta = 0$ ou avec $(x-3)^2$, vous trouvez une seule racine 3 , c'est l'abscisse du seul point d'intersection.
Pour obtenir l'ordonnée, il faut calculer son image avec, au choix, g_1 ou g_2 (mais g_2 est indéniablement plus sympa) :

$g_2(3) = 3^2 - 4 = 5$ → Vous pouvez confirmer votre résultat au brouillon avec $g_1(3) = 2\times3^2 - 6\times3 + 5 = 18 - 18 + 5 = 5$.

Donc, le point d'intersection des paraboles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ a pour coordonnées $(3 ; 5)$.

---

⑧ L'expression de la fonction est donnée sous forme factorisée.

a. $F(x) = 0$
$\Leftrightarrow -5(x+2)(x-3) = 0$
$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$

Donc, les solutions sont -2 et 3 .

b. Le coefficient dominant -5 est négatif, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Signes de P		$-$	0	$+$	0	$-$	

c. L'extremum de P est $\dfrac{-2+3}{2} = 0{,}5$. → J'ai les deux racines, j'en fais la moyenne.

d. Le coefficient dominant -5 est négatif,
donc P est croissante puis décroissante
donc l'extremum de P est un maximum.

e. $P(0{,}5) = -5(0{,}5+2)(0{,}5-3) = 31{,}25$ → On pouvait rédiger en fractions : $P(\frac{1}{2}) = -5(\frac{1}{2}+2)(\frac{1}{2}-3) = \frac{125}{4}$.

Le coefficient dominant -5 est négatif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$	$0{,}5$	$+\infty$
Variations de P	↗	$31{,}25$	↘

---

⑨ L'expression de la fonction est donnée sous forme canonique.

a. D'après la forme canonique de $h(x)$, l'extremum de h est 12 et il est atteint en -1 .

Le coefficient dominant $-\frac{1}{3}$ est négatif,
donc h est croissante puis décroissante
donc l'extremum de h est un maximum.

b. Le sommet de la parabole a pour abscisse -1
donc l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = -1$.

c. Le coefficient dominant $-\frac{1}{3}$ est négatif, donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations de h	↗	12	↘

d. $h(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2 + 12$

$= -\frac{1}{3}(x^2 + 2x + 1) + 12$

$= -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + 12$

$= -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{35}{3}$

e. $\Delta = (-\frac{2}{3})^2 - 4\times(-\frac{1}{3})\times\frac{35}{3} = 16 > 0$

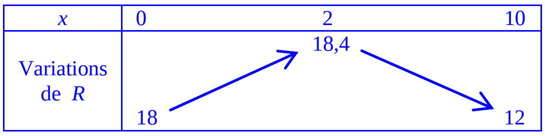
Donc, il y a deux solutions qui sont $\dfrac{-(-\frac{2}{3}) + \sqrt{16}}{2\times(-\frac{1}{3})} = -7$ et $\dfrac{-(-\frac{2}{3}) - \sqrt{16}}{2\times(-\frac{1}{3})} = 5$.

⑩ La particularité de l'exercice est que la fonction n'est pas étudiée sur ℝ mais sur un intervalle.
C'est ce qui provoque la question qui peut paraître bizarre... Il y aura en effet un minimum et un maximum...

$$\begin{cases} -\dfrac{0{,}4}{2\times(-0{,}1)} = 2 \\ R(2) = -0{,}1\times 2^2 + 0{,}4\times 2 + 18 = 18{,}4 \end{cases}$$

donc les coordonnées du sommet sont $(2 ; 18{,}4)$.

Le coefficient dominant $-0{,}1$ est négatif, donc le tableau de variations est :



Montrez les calculs :
$R(0) = -0{,}1\times 0^2 + 0{,}4\times 0 + 18 = 18$
$R(10) = -0{,}1\times 10^2 + 0{,}4\times 10 + 18 = 12$

On en déduit que le maximum de R est $18{,}4$ et qu'il est atteint en 2 et que le minimum de R est 12 et qu'il est atteint en 10 .

---

⑪ Dans un exercice concret, votre travail sera de traduire :
- soit une information concrète en information mathématique,
- soit une information mathématique en information concrète.

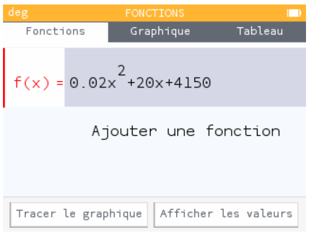
1. **a.** On vous donne **300 objets** : cela correspond à $x = 300$.
On vous demande le **coût de production** pour ces **300 objets** : cela correspond à $C(300)$.

$C(300) = 0{,}02\times 300^2 + 20\times 300 + 4\,150 = 11\,950$
Donc, le coût de production pour la fabrication de 300 objets est de 11 950 €. → Je transforme **11 950** en **11 950 €**.

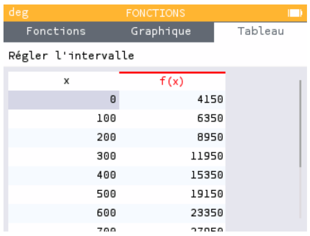
b.

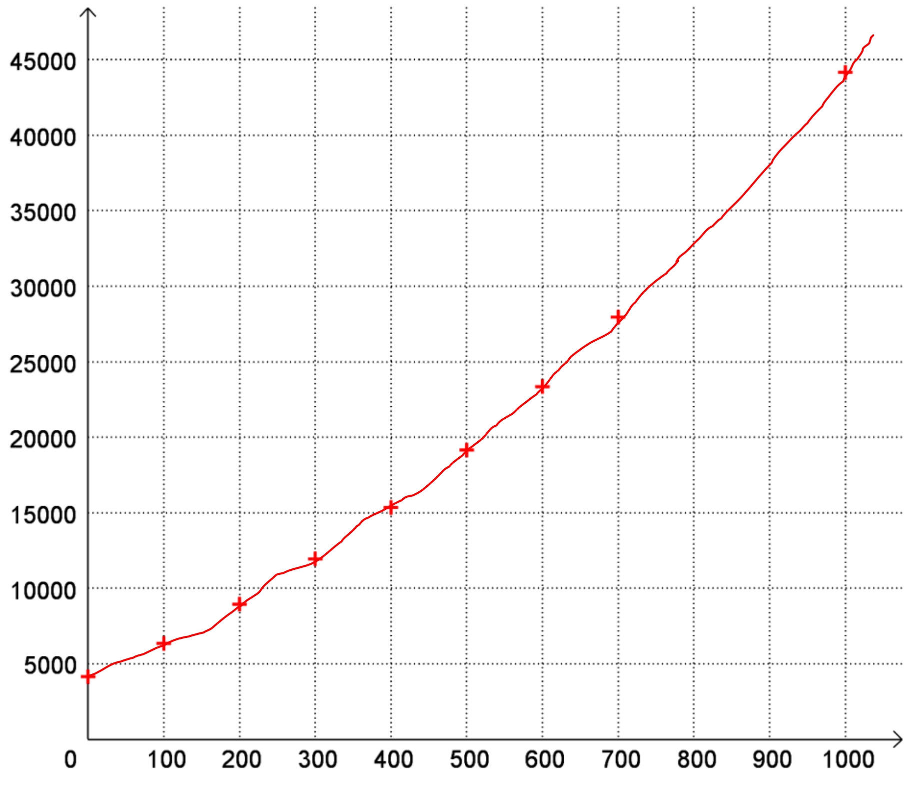
x	0	100	200	300	400	500	600	700	1 000
$C(x)$	4 150	6 350	8 950	11 950	15 350	19 150	23 350	27 950	44 150

Vous pouvez faire neuf fois le calcul, mais vous pouvez aussi utiliser votre calculatrice.
Définissez la fonction :



et affichez le tableau de valeurs :





Attention aux deux échelles.
Pour les ordonnées, on est obligés de placer à peu près...
Par exemple, 19 150 doit être à la hauteur $\dfrac{19\,150\times 1\text{ cm}}{5\,000} = 3{,}83\text{ cm}$ qu'on place à 3,8 cm .

Pour l'allure générale, essayez de tracer une courbe la plus harmonieuse possible qui passe par les points.

c. On demande un nombre d'objets fabriqués : cela correspond à x .
On vous donne le coût de production 30 400 € : cela correspond à $C(x)$.
Donc, on cherche x et on connaît $C(x)$ qui vaut 30 400 , c'est une équation :
$C(x) = 30\,400$
$\Leftrightarrow\ 0{,}02x^2 + 20x + 4\,150 = 30\,400$
$\Leftrightarrow\ 0{,}02x^2 + 20x - 26\,250 = 0$

$\Delta = 20^2 - 4\times0{,}02\times(-26\,250) = 2\,500 > 0$

Donc, il y a deux solutions qui sont $\dfrac{-20+\sqrt{2\,500}}{2\times0{,}02} = 750$ et $\dfrac{-20-\sqrt{2\,500}}{2\times0{,}02} = -1\,750$.

Les solutions mathématiques 750 et –1 750 correspondent à des nombres d'objets.
Le nombre d'objets cherché est un entier positif, donc il ne peut pas valoir –1 750 .
Le coût de production a donc été de 30 400 € pour 750 objets fabriqués. → Je transforme 750 en 750 objets fabriqués.

2. a. Le bénéfice est égal à l'argent gagné – l'argent dépensé, c'est-à-dire à la somme des ventes – le coût de production.
Le coût de production, c'est $C(x)$.
Le nombre d'objets vendus est x et le prix d'un objet est 52 , donc la somme des ventes est $52\times x$.

Le bénéfice est $B(x) = 52x - C(x)$
$= 52x - (\,0{,}02x^2 + 20x + 4\,150\,)$
$= -0{,}02x^2 + 32x - 4\,150$.

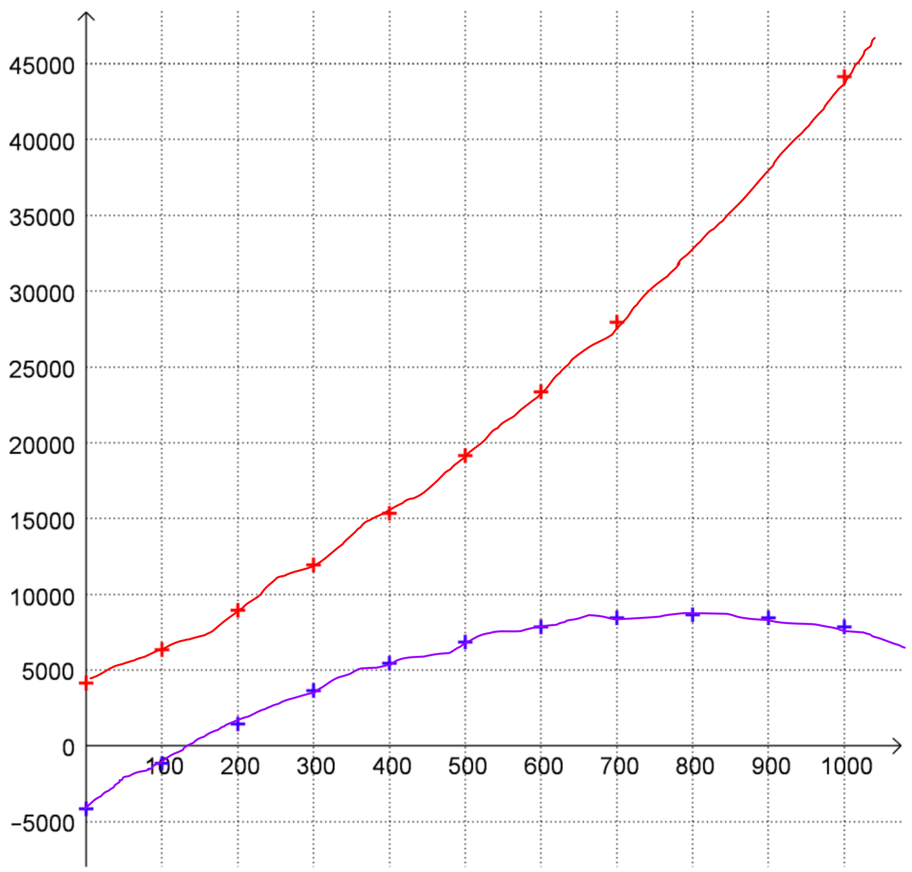
b. Le bénéfice qui atteint un maximum, c'est la fonction du second degré B qui atteint un maximum.
On sait faire !
Le coefficient dominant de $B(x)$ est $-0{,}02$ négatif,
donc B est croissante puis décroissante
donc l'extremum de B est un maximum.

Le nombre d'objets fabriqués pour lequel ce bénéfice maximum est atteint, c'est l'abscisse du sommet.
Le maximum de B est atteint en $-\dfrac{32}{2\times(-0{,}02)} = 800$.
Donc, le bénéfice maximum est atteint pour 800 objets fabriqués. → Je transforme 800 en 800 objets fabriqués.

Le bénéfice maximum demandé, c'est l'ordonnée du sommet.
Le maximum de B vaut $B(800) = -0{,}02\times800^2 + 32\times800 - 4\,150 = 8\,650$.
Donc, le bénéfice maximum est de 8 650 €. → Je transforme 8 650 en 8 650 €.

c.

x	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
$B(x)$	–4 150	–1 150	1 450	3 650	5 450	6 850	7 850	8 450	8 650	8 450	7 850



d. On demande un nombre d'objets fabriqués : cela correspond à x .
On vous donne le bénéfice 8 200 € : cela correspond à $B(x)$.
Comme dans le **c.**, c'est une équation :
$B(x) = 8\,200$
$\Leftrightarrow -0{,}02x^2 + 32x - 4\,150 = 8\,200$
$\Leftrightarrow -0{,}02x^2 + 32x - 12\,350 = 0$

$\Delta = 32^2 - 4\times(-0{,}02)\times(-12\,350) = 36 > 0$

Donc, il y a deux solutions qui sont $\dfrac{-32+\sqrt{36}}{2\times(-0{,}02)} = 650$ et $\dfrac{-32-\sqrt{36}}{2\times(-0{,}02)} = 950$.

Les solutions mathématiques **650** et **950** correspondent à des nombres d'objets.
Le bénéfice sera de 8 200 € pour 650 et 950 objets fabriqués.

e.
- $B(x) > 0$
  $\Leftrightarrow -0{,}02x^2 + 32x - 4\,150 < 0$

  $\Delta = 32^2 - 4\times(-0{,}02)\times(-4\,150) = 692 > 0$

  Donc, il y a deux racines qui sont $r_1 = \dfrac{-31+\sqrt{692}}{2\times(-0{,}02)} = 775 - 50\sqrt{173}$ et $r_2 = \dfrac{-31-\sqrt{692}}{2\times(-0{,}02)} = 775 + 50\sqrt{173}$.

  Le coefficient dominant $-0{,}02$ est négatif, donc le tableau de signes est :

  Il est utile ici de nommer les deux racines par des lettres pour éviter d'écrire les grosses expressions numériques dans le tableau.

x	$-\infty$		r_1		r_2		$+\infty$
Signes de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  On en déduit : $\mathscr{S} =]\,775 - 50\sqrt{173}\ ;\ 775 + 50\sqrt{173}\,[$.   → La 1ère question est purement mathématique.

- **$B(x) > 0$** signifie que le bénéfice est positif.
  Les racines ne sont pas exploitables sous leur forme exacte :
  $\begin{cases} 775 - 50\sqrt{173} = 117{,}3... \\ 775 + 50\sqrt{173} = 1\,432{,}6... \end{cases}$
  donc, la résolution de l'inéquation permet de dire que le bénéfice sera positif lorsqu'on fabrique entre 118 et 1 432 objets.

  Remarquez qu'il faut prendre la valeur approchée par excès pour la borne inférieure : lorsque $x = 117$, on est à gauche de r_1 et $B(x) < 0$.
  Et il faut prendre la valeur approchée par défaut pour la borne supérieure : lorsque $x = 1\,433$, on est à droite de r_2 et $B(x) < 0$.

---

⑫ On ne donne pas le détail.

a. La 1ère réponse est : 6,2 centaines d'objets ou 620 objets .
La 2ème réponse est : 4,21 milliers d'euros ou 4 210 euros .

Attention aux unités en centaines ou en milliers !
Surtout ne pas répondre 6,2 et 4,21 ...

b. L'inéquation est $-0{,}25x^2 + 3{,}1x - 5{,}4 > 0$.
On trouve deux racines peu sympathiques $\dfrac{31-\sqrt{421}}{5}$ et $\dfrac{31+\sqrt{421}}{5}$.

L'ensemble de solutions est $\left]\dfrac{31-\sqrt{421}}{5}\ ;\ \dfrac{31+\sqrt{421}}{5}\right[$.

Mais les deux valeurs exactes ne sont pas utilisables pour une réponse concrète.

Voyons les valeurs à virgule : $\dfrac{31-\sqrt{421}}{5} = 2{,}096\ldots$ qui correspond à 209,6... objets et $\dfrac{31+\sqrt{421}}{5} = 10{,}303\ldots$ qui correspond à 1 030,3... objets .

On conclut en arrondissant à l'entier par excès et par défaut : La plage de bénéfice est entre 210 et 1030 objets.

---

⑬ **1.** N'oubliez pas que l'intervalle de définition est [50 ; 200] .

L'abscisse du sommet est $-\dfrac{-1}{2\times0{,}02} = 25$.

L'ordonnée du sommet est $C(25) = 0{,}02\times25^2 - 25 + 150 = 137{,}5$.

Le coefficient dominant 0,02 est positif, donc le tableau de variations est :

x	50	200
Variations de P_1	150 ↗	750

$C(50) = 0{,}02\times50^2 - 50 + 150$
$= 150$

$C(200) = 0{,}02\times200^2 - 200 + 150$
$= 750$

Le tableau complet est :

x	$-\infty$	25	50	200	$+\infty$
Variations de P_1	↘	137,5	↗		

On n'en prend que la partie entre 50 et 200

2. On ne donne pas le détail.

a. Attention, on parle de <u>coût moyen</u>.

Il faut donc <u>diviser le coût par le nombre de repas</u>.

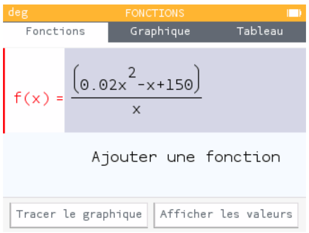
Pour 50 repas, on calcule $\dfrac{C(50)}{50}$ et on trouve 3 euros.

Pour 100 repas, on trouve 2,50 euros.

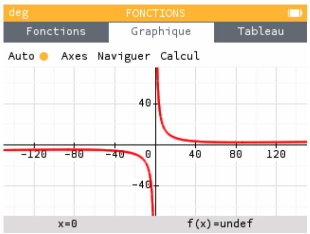
Pour 200 repas, on trouve 3,75 euros.

b. $C_M(x) = \dfrac{0,02x^2 - x + 150}{x}$ qu'on peut écrire $0,02x - 1 + \dfrac{150}{x}$.

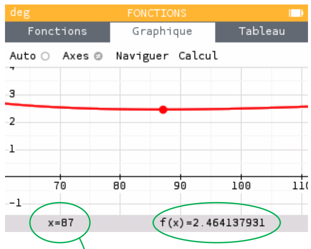
c. Définissez votre fonction :



Tracez-la :



Ajustez les axes :



On peut avoir la meilleure valeur entière 87 en bougeant le point et en regardant les coordonnées.

Vue l'imprécision de la courbe, on accepte une valeur entre 80 et 90 repas.

---

⑭ **1.** Une fonction d'offre est croissante car lorsque le prix de vente de l'objet augmente, la quantité fabriquée augmente : en effet le producteur a intérêt à en fabriquer plus pour vendre à un prix élevé.

Une fonction de demande est décroissante car plus le prix de vente de l'objet diminue, plus la quantité achetée augmente : en effet, l'acheteur a intérêt à en acheter à un prix bas.

2. On ne donne pas le détail des résolutions :

- Les solutions de l'équation $f(p) = 0$ sont 0,3 et 7 .
- La solution de l'équation $g(p) = 0$ est 3,3 .

Pour étudier ce problème, il faut que la quantité d'objets fabriqués soit positive,
donc que p soit entre 0,3 et 7 car le coefficient dominant $-0,6$ est négatif .
Mais il faut aussi que la quantité d'objets achetés soit positive, donc que p soit inférieur à 3,3 .
Il faut donc que p soit entre 0,3 et 3,3 .

3.
- On obtient le prix d'équilibre lorsque :

$f(p) = g(p)$
$\Leftrightarrow -0,6p^2 + 4,38p - 1,26 = -2,2p + 7,26$
$\Leftrightarrow -0,6p^2 + 6,58p - 8,52 = 0$

$\Delta = 6,58^2 - 4\times(-0,6)\times(-8,52) = 22,8484 > 0$

donc il y a deux valeurs possibles de p qui sont $\dfrac{-6,58 - \sqrt{22,8484}}{2\times(-0,6)} = \dfrac{142}{15} = 9,46...$ et $\dfrac{-6,58 + \sqrt{22,8484}}{2\times(-0,6)} = 1,5$.

Comme p est entre 0,3 et 3,3 , la valeur du prix d'équilibre est 1,50 € .

- $g(1,5) = -2,2\times1,5 + 7,26 = 3,96$ → Vérifiez votre valeur en calculant $f(1,5) = -0,6\times1,5^2 + 4,38\times1,5 - 1,26 = 3,96$.

Donc, la quantité d'équilibre est de 3,96 millions de stylos. → N'oubliez pas millions et stylos .

4. a. Si le prix de vente est inférieur au prix d'équilibre, on a $f(p) < g(p)$.
L'offre est inférieure à la demande et donc :
- l'acheteur ne peut pas acheter les quantités qu'il veut (on parle de *pénurie* ou de *rareté*),
- le producteur peut alors monter le prix.

<u>Remarque</u> : La hausse du prix permet de s'approcher du prix d'équilibre.

b. Si le prix de vente est supérieur au prix d'équilibre, on a $f(p) > g(p)$.
L'offre est supérieure à la demande et donc :
- le producteur a une partie de sa production qui n'est pas achetée (on parle d'*excédent*, d'*abondance* ou de *surproduction*),
- l'acheteur peut alors faire baisser le prix.

<u>Remarque</u> : La baisse du prix permet de s'approcher du prix d'équilibre.