

Savoir CALCULER AVEC DES MATRICES

Ce que je dois avoir compris

- Une **matrice de dimension $n \times p$** est un tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes, écrits entre crochets (ou entre parenthèses).
Le réel de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, noté généralement sous la forme a_{ij} , est appelé **coefficient** de la matrice :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3 et $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ est une matrice de dimension 3×2 .

- Lorsqu'une matrice n'a qu'une ligne (donc de dimension $1 \times p$), on dit que c'est une **matrice-ligne**.
Lorsqu'une matrice n'a qu'une colonne (de dimension $n \times 1$), on dit que c'est une **matrice-colonne**.

Remarque : Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ du plan et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ de l'espace peuvent être assimilés à des matrices-colonnes.

- Lorsqu'une matrice contient n lignes et n colonnes, on dit que c'est une **matrice carrée d'ordre n** .

Les coefficients a_{ii} forment la **diagonale** de la matrice.

Si tous les coefficients hors de la diagonale sont nuls, la matrice est appelée **matrice diagonale**.

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 4.

Ce que je dois savoir faire

- Additionner deux matrices**

Soit deux matrices A , de coefficients a_{ij} , et B , de coefficients b_{ij} , de même dimension.

La **somme $A + B$** est la matrice de coefficients $a_{ij} + b_{ij}$ (on additionne les coefficients de même position).
Elle est de même dimension que A et B .

Remarque : Une matrice ayant tous ses coefficients nuls est appelée **matrice nulle**.

- Multiplier une matrice par un nombre**

Le **produit kA** , avec k nombre réel, la matrice de coefficients ka_{ij} (on multiplie tous les coefficients par k).
Elle est de même dimension que A .

Remarque : On peut alors calculer des combinaisons linéaires de deux matrices, de la forme $kA + hB$.

- Multiplier deux matrices**

Pas si compliquée dans la pratique, le produit de deux matrices est difficile à définir :

- Une définition préliminaire : Soit $L = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{bmatrix}$ une matrice-ligne $1 \times p$ et $C = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix}$ une matrice-colonne $p \times 1$.

Elles sont donc telles qu'il y a autant de coefficients en ligne que de coefficients en colonne.

On appelle **produit de L par C** , notée **$L \times C$** (ou simplement **LC**) le réel $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1p}b_{p1}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1p}b_{p1}$$

Exemple : Si $L = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$, alors $LC = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = (-2) \times 3 + 5 \times 2 + 1 \times (-7) = -1$.

- La définition générale :

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ une matrice $n \times p$ dont la $i^{\text{ème}}$ ligne $[a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ip}]$ est notée L_i .

Soit $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix} = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_m]$ une matrice $p \times m$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}$ est notée C_j .

Elles sont donc telles que A possède autant de colonnes que B possède de lignes.

On appelle **produit de A par B** la matrice de coefficients $c_{ij} = L_i \times C_j$.

AB a autant de lignes que A et autant de colonnes que B : c'est une matrice $n \times m$.

Remarque : Si $n \neq m$, le produit $B \times A$ n'existe pas !

- Méthode : Pour calculer le produit de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ par $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on peut présenter au brouillon

sous la forme pratique :

faire ainsi pour les huit coefficients

puis écrire en ligne : $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -8 & 11 \\ 0 & 10 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

Remarque : Les calculatrices savent faire du calcul matriciel mais, pour de petites matrices, il est souvent plus rapide de faire le calcul à la main...

Attention néanmoins en post-bac où les calculatrices ne seront pas autorisées !

• Multiplier des matrices carrées

Les matrices carrées de même ordre n constituent un monde où beaucoup de choses deviennent possibles :

- Plus d'inquiétude sur l'existence des produits $A \times B$ et $B \times A$ mais, attention, ils sont généralement différents ! (on dit que la multiplication n'est pas *commutative*)

- On fait attention aux vieux réflexes, valables avec les nombres réels, qui ne le sont plus...

Ainsi, si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, alors le produit AB est $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, la matrice nulle !

Le théorème du produit nul est donc faux... Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

- On peut calculer $A \times B \times C$ en commençant par le 1^{er} produit $A \times B$ ou par le 2^{ème} produit $B \times C$ mais on ne pourra pas changer l'ordre des facteurs en multipliant A par C .

$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ (on dit que la multiplication de matrices est *associative*)

- On peut développer en distribuant une matrice sur une somme de matrices :

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

$$(A + B) \times (C + D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D$$

- La matrice diagonale $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ dont la diagonale ne contient que des 1, est appelée **matrice unité d'ordre n** .

Pour toute matrice A carrée d'ordre n , on a : $A I_n = I_n A = A$.

- **Calculer une puissance de matrice carrée**

- On peut multiplier sans risque une matrice carrée par elle-même.

On définit les puissances $A^2 = A \times A$ (appelée la **matrice carré** de A) et les A^k (**puissance $k^{\text{ème}}$** de A).

Par convention, $A^0 = I_n$ (surtout, ne pas écrire $A^0 = 1$) et $A^1 = A$.

Remarque : Les identités remarquables ne présentent plus d'intérêt !

$(A + B)(A - B)$ ne devient pas $A^2 - B^2$ mais $A^2 - AB + BA - B^2$ (car $AB \neq BA$ en général).

$(A + B)^2$ devient $A^2 + AB + BA + B^2$ (ne pas écrire $2AB$).

- De nombreux exercices consistent à calculer une puissance de matrice en vous guidant pas à pas.

Il n'y a pas de méthode particulière mise à part l'utilisation de la calculatrice.

- Retenons néanmoins le résultat suivant :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale, alors, pour tout entier } n \geq 1, A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

C'est un beau résultat, mais attention, il n'est valable que pour les matrices diagonales...

- **Démontrer qu'une matrice est inversible**
Démontrer qu'une matrice est l'inverse d'une autre matrice carrée
Calculer l'inverse d'une matrice carrée

- Lorsque deux matrices A et B carrées d'ordre n vérifient $\begin{cases} AB = I_n \\ BA = I_n \end{cases}$, on dit que A et B sont **inverses l'une de l'autre** et on note $A = B^{-1}$ et $B = A^{-1}$.

- Si une matrice possède une matrice inverse, on dit qu'elle est **inversible** (et cette matrice inverse est unique).
Ce n'est pas le cas de toutes les matrices...

- **Méthode** : Si on vous fournit la matrice qui doit être l'inverse, il suffit de montrer que les deux produits font I_n .

- **Méthode** : Sinon, on peut calculer l'inverse à la calculatrice puis montrer que les deux produits font I_n .

Cela permet de montrer que la matrice est inversible et de justifier l'inverse.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- **Méthode pour les matrices carrées d'ordre 2** :

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors A est inversible si et seulement si son déterminant $ad - bc$ est non nul.

Et alors, son inverse est $\frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Remarques sur les exercices

- Les exercices ② et ③ sont des exercices de calcul.
Entraînez-vous à les faire à la main.
- Les exercices ⑤ à ⑧ demanderont des démonstrations par récurrence.
- Les exercices ⑨, ⑩ et ⑪ abordent les matrices inversibles.
Le ⑨ est un grand classique et le ⑪ vous montre une application des matrices à la résolution d'un système.

- ① Écrire la matrice carrée d'ordre 3 dont les coefficients a_{ij} vérifient $a_{ij} = i + j$, pour tous entiers i et j de $\{1; 2; 3\}$.

② 1. On donne $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Calculer $M + N$, $M - N$, $10M$ et la combinaison linéaire $2M + 3N$.

2. On donne $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ et $E = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Effectuer tous les produits possibles de deux de ces matrices.

③ Étant donnée les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^3 et B^5 .

- ④ On considère les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & n \\ m & 0 \end{pmatrix}$ où m et n sont des entiers relatifs.

Parmi ces matrices, déterminer celles dont le carré vaut l'opposé de la matrice unité.

⑤ Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ avec a et b réels.

Démontrer par récurrence que $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

⑥ Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

a. Calculer A^2 .

b. Démontrer par récurrence que A^n est nulle pour tout entier $n \geq 3$.

*Encore un drôle de comportement de la part de matrices... Les matrices dont les puissances sont nulles à partir d'un certain exposant s'appellent des matrices **nilpotentes**.*

⑦ On pose la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^0 , A^1 , A^2 et A^3 .

b. Faire une conjecture sur l'expression de A^n pour tout n entier naturel.

c. Valider cette conjecture par récurrence.

⑧ On pose la matrice $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Calculer J^2 , J^3 et J^4 .

b. Conjecturer l'expression de J^n , pour tout entier $n \geq 1$, et la démontrer par récurrence.

Soit $M = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

c. Déterminer les réels α et β tels que $M = \alpha I_2 + \beta J$, avec $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

d. Pour deux matrices carrées de même ordre, on rappelle l'identité : $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.
Établir l'identité du développement de $(A + B)^3$.

e. En déduire M^3 .

⑨ Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -14 & -5 \end{bmatrix}$.

a. On pose la matrice $P = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$.

Montrer que P est inversible et que son inverse est $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$, notée P^{-1} .

b. Calculer la matrice $D = P^{-1} M P$, puis D^5 .

c. Montrer que $M = P D P^{-1}$.
En déduire M^5 .

⑩ On pose la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $M^2 - 4M$.

b. Montrer que M est inversible et que son inverse est $\frac{1}{5}(M - 4I_2)$.

⑪ On considère le système $\begin{cases} -24x + 18y + 5z = 81 \\ 20x - 15y - 4z = -67 \\ -5x + 4y + z = 17 \end{cases}$, qu'on sait résoudre par substitution ou par combinaisons linéaires.

On pose les matrices suivantes : $M = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 81 \\ -67 \\ 17 \end{bmatrix}$.

a. Montrer que la matrice $M = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et que son inverse est $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, notée M^{-1} .

b. Calculer MX et écrire le système comme une égalité matricielle.

c. Multiplier les deux membres de l'égalité matricielle à gauche par M^{-1} .
En déduire la solution du système.