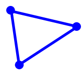
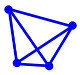
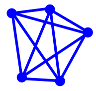
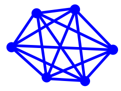
Correction de **GRAPHES - Fiche 1**

Navigation vers les corrections : ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬

① **a.**

Ordres	2	3	4	5	6
Exemples					
Nombres d'arêtes	1	3	6	10	15
Sommes des degrés	2×1 = 2	3×2 = 6	4×3 = 12	5×4 = 20	6×5 = 30

Chaque sommet est de degré 2
et il y a 3 sommets

Chaque sommet est de degré 3
et il y a 4 sommets

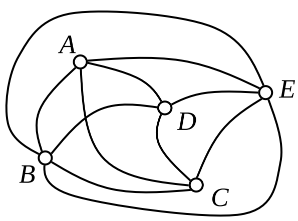
b. Le graphe est simple et complet,
donc, chaque sommet est relié aux $n-1$ autres sommets, donc est de degré $n-1$ et il y a n sommets.
Donc la somme des degrés des sommets vaut $n(n-1)$.

c. On pose $\mathscr{P}(n)$ la propriété à démontrer.

- Initialisation :
  Les graphes simples et complets d'ordre 2 ont 1 arête et $\dfrac{2(2-1)}{2} = 1$
  donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- Itération :
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$ quelconque.
  Considérons un graphe G d'ordre $n+1$ et isolons un sommet A des n autres sommets.
  Par hypothèse de récurrence, les n autres sommets forment un sous-graphe contenant $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes.
  Le graphe est simple et complet,
  donc, A est relié par une arête aux n autres sommets,
  donc le nombre d'arêtes de G vaut $\dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{n(n-1)+2n}{2}$
  $= \dfrac{n^2-n+2n}{2}$
  $= \dfrac{n^2+n}{2}$
  $= \dfrac{(n+1)(n+1-1)}{2}$
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion :
  Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

② **2.1.** **a.** Il est d'ordre 5.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	4	5	4	4	5



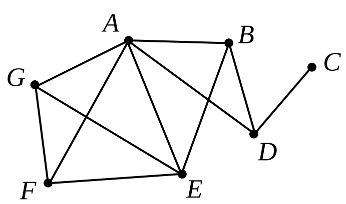
b. Le nombre d'arêtes est $\dfrac{4+5+4+4+5}{2} = 11$.

c. Il n'est pas simple car B et E sont reliés par deux arêtes.
Pour le rendre simple, il faut supprimer une de ces deux arêtes entre B et E.

d. Il est complet car chaque sommet est relié à tous les autres sommets.

2.2. **a.** Il est d'ordre 7.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	5	3	1	3	4	3	3

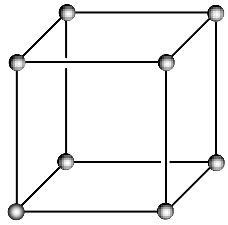


b. Le nombre d'arêtes est $\dfrac{5+3+1+3+4+3+3}{2} = 11$.

c. Il est simple car chaque sommet est relié aux autres sommets par au plus une arête.

d. Il n'est complet pas car, par exemple, B et C ne sont pas reliés par une arête.
A-G-F-E est le plus grand sous-graphe complet, d'ordre 4.

2.3. **a.** Il est d'ordre 6.
Chaque sommet est de degré 3.



b. Le nombre d'arêtes est $\frac{6\times3}{2}=9$.

c. Il est simple car chaque sommet est relié aux autres sommets par au plus une arête.

d. Il n'est complet pas car, par exemple, il manque les arêtes diagonales des faces et les arêtes diagonales du cube.
Les plus grands sous-graphes complets sont d'ordre 2, ce sont les paires de sommets reliés.

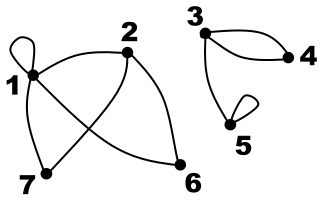
2.4. **a.** Il est d'ordre 7.

Sommet	1	2	3	4	5	6	7
Degré	5	3	3	2	3	2	2

b. Le nombre d'arêtes est $\frac{5+3+3+2+3+2+2}{2}=10$.

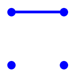
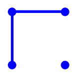
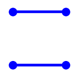
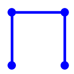
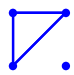
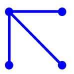
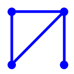
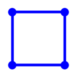
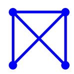
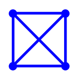
c. Il n'est pas simple car il y a des boucles et les sommets 3 et 4 sont reliés par deux arêtes.
Pour le rendre simple, il faut supprimer les boucles et une des deux arêtes entre 3 et 4.

d. Il n'est complet pas car, par exemple, 2 et 3 ne sont pas reliés par une arête.
1-2-7 est un plus grand sous-graphe complet, d'ordre 3. Il y a aussi 1-2-6.

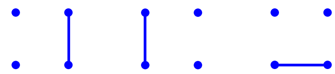


Graphe n°4

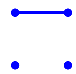
③ *La méthode exhaustive attendue consiste à montrer tous les cas possibles.*
Les graphes simples d'ordre 4 sont les suivants :

Avec 1 arête		2 sommets de degré 0 2 sommets de degré 1	Donc 2 sommets de degré impair.
Avec 2 arêtes		1 sommet de degré 0 2 sommets de degré 1 1 sommet de degré 2	Donc 2 sommets de degré impair.
		4 sommets de degré 1	Donc 4 sommets de degré impair.
Avec 3 arêtes		2 sommets de degré 1 2 sommets de degré 2	Donc 2 sommets de degré impair.
		1 sommet de degré 0 3 sommets de degré 2	Donc 0 sommet de degré impair.
		3 sommets de degré 1 1 sommet de degré 3	Donc 4 sommets de degré impair.
Avec 4 arêtes		1 sommet de degré 1 2 sommets de degré 2 1 sommet de degré 3	Donc 2 sommets de degré impair.
		4 sommets de degré 0	Donc 0 sommet de degré impair.
Avec 5 arêtes		2 sommets de degré 2 2 sommets de degré 3	Donc 2 sommets de degré impair.
Avec 6 arêtes		4 sommets de degré 3	Donc 4 sommets de degré impair.

Remarquons que les graphes



sont identiques à



④ Il y a 35 scientifiques donc les poignées de main sont modélisées par un graphe d'ordre 35. *(Surtout, ne pas essayer de le représenter…)*
Chaque scientifique sert la main aux 34 autres scientifiques donc chaque sommet est de degré 34.
La somme des degrés vaut alors $35\times34=1\,190$ et c'est le double du nombre d'arêtes.
Le nombre d'arêtes et donc de poignées de main vaut donc $\frac{1\,190}{2}=595$.

⑤ Il y a 7 équipes donc les rencontres seront modélisées par un graphe d'ordre 7.
D'après la direction du tournoi, chaque équipe jouera contre 3 autres équipes donc chaque sommet sera de degré 3.
La somme des degrés vaudra alors $7\times3=21$: impossible car 21 ne peut être le double du nombre d'arêtes.

⑥ **a.** Posons $2k$ un entier pair et $2k'+1$ un entier impair, avec k et k' dans $\mathbb{Z}$.
Alors, la somme vaut $2k+2k'+1=2(k+k')+1$, avec $(k+k')\in\mathbb{Z}$.
Donc, cette somme est impaire.

b. Posons $2k_1$, $2k_2$, $2k_3$, … , $2k_n$ des entiers pairs, avec k_1, k_2, k_3, … , k_n dans $\mathbb{Z}$.
Alors, la somme de ces n entiers vaut $2k_1+2k_2+2k_3+\ldots+2k_n=2(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_n)$
avec $(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_n)\in\mathbb{Z}$.
Donc, cette somme est paire.

c. *Attention, il va falloir deux démonstration, une pour le cas où n est pair et une pour le cas où il est impair.*

Cas où n est pair :

On pose $\mathscr{P}(n)$: « une somme de n entiers impairs est paire ».

- Initialisation :
Soit $2k+1$ et $2k'+1$ deux entiers impairs, avec k et k' dans $\mathbb{Z}$.
La somme vaut $2k+1+2k'+1=2(k+k'+1)$, avec $(k+k'+1)\in\mathbb{Z}$, donc est paire.
donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

- Itération :
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier pair $n\geqslant 2$ quelconque.
Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie. $\longrightarrow$ *Attention, l'entier pair qui suit n n'est pas $n+1$ mais $n+2$!!!*

Soit $n+2$ entiers impairs.
La somme des n premiers entiers impairs est paire par hypothèse de récurrence.
La somme des deux derniers entiers impairs est paire d'après l'initialisation.
Donc, la somme de ces $n+2$ entiers impairs est paire, d'après **b.**.

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

- Conclusion :
Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier pair $n\geqslant 2$.

Cas où n est impair :

On pose $\mathscr{Q}(n)$: « une somme de n entiers impairs est impaire ».

- Initialisation :
Soit $2k+1$, $2k'+1$ et $2k''+1$ trois entiers impairs, avec k, k' et k'' dans $\mathbb{Z}$.
La somme vaut $2k+1+2k'+1+2k''+1=2(k+k'+k''+1)+1$, avec $(k+k'+k''+1)\in\mathbb{Z}$, donc est impaire.
donc $\mathscr{Q}(3)$ est vraie.

- Itération :
Supposons $\mathscr{Q}(n)$ vraie pour un certain entier impair $n\geqslant 3$ quelconque.
Montrons que $\mathscr{Q}(n+2)$ est vraie. $\longrightarrow$ *Là encore, l'entier impair qui suit n n'est pas $n+1$ mais $n+2$.*

Soit $n+2$ entiers impairs.
La somme des n premiers entiers impairs est impaire par hypothèse de récurrence.
La somme des deux derniers est paire d'après l'initialisation de la première démonstration par récurrence.
Donc, la somme de ces $n+2$ entiers impairs est impaire, d'après **a.**.

Donc $\mathscr{Q}(n+2)$ est vraie.

- Conclusion :
Donc, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie pour tout entier impair $n\geqslant 3$.

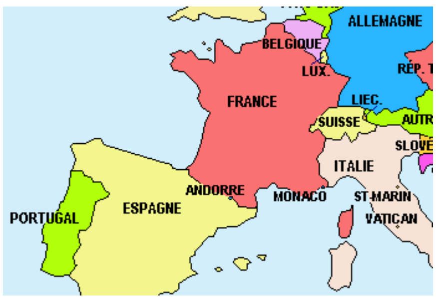
d. Supposons que, dans un graphe, le nombre de sommets de degrés impairs est impair.

Alors, la somme des degrés se décompose en $\begin{cases}\text{une somme paire, celle des degrés pairs, d'après } \textbf{b.},\\ \text{une somme impaire, celle des degrés impairs, d'après } \textbf{c.}.\end{cases}$

donc, cette somme est impaire, d'après **a.**.
Or, la somme des degrés vaut le double du nombre d'arêtes : il est impossible qu'un double d'un entier soit impair.
Conclusion, l'hypothèse est fausse, donc dans un graphe, le nombre de sommets de degrés impairs est pair.

---

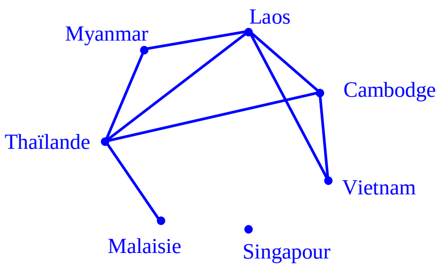
⑦ **1.** La France métropolitaine est frontalière de la Belgique, du Luxembourg, de l'Allemagne, de la Suisse, de l'Italie, de Monaco, de l'Espagne et de l'Andorre.
Donc, elle est de degré 8.



2. Le graphe n'est pas connexe car il y a des pays sans frontière terrestre (Grande Bretagne, Islande, ...).

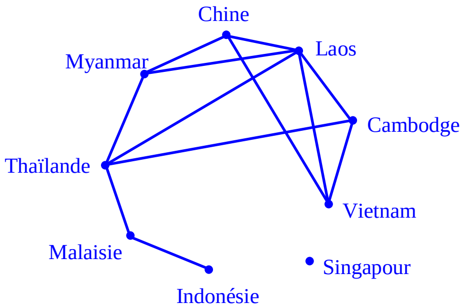
3. Le Portugal est de degré 1 car il n'a qu'une frontière terrestre (avec l'Espagne).

⑧ **a.**

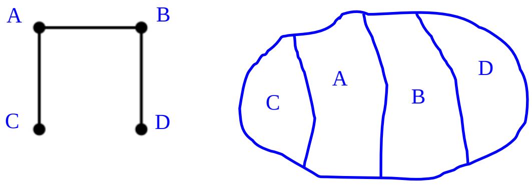


Attention. Singapour est une île...

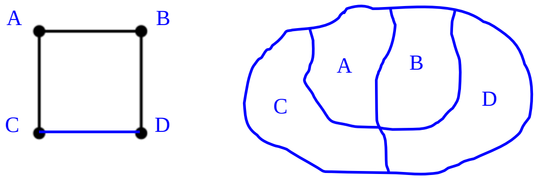
b.



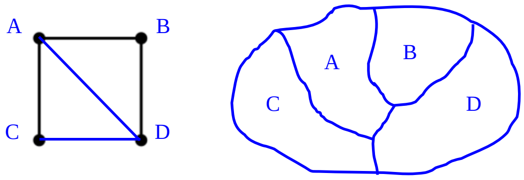
⑨ **a.**



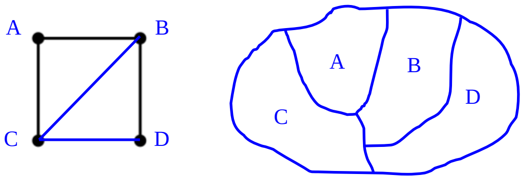
b.



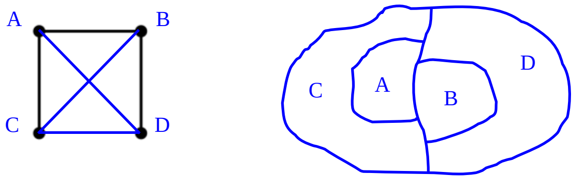
c.



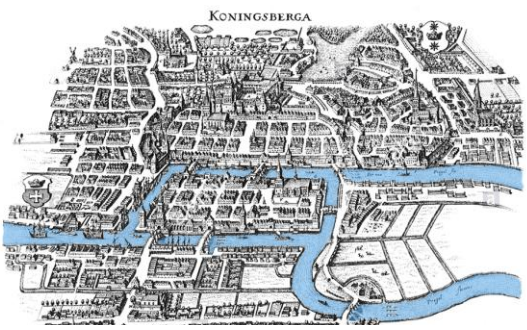
ou



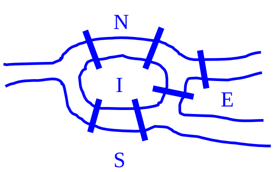
d.

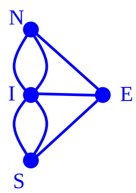


⑩ **a.**

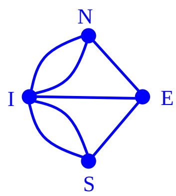


On peut schématiser le plan avant de passer à un graphe fidèle aux positions géographiques :



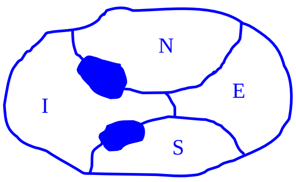


ou pas :



b. Le problème est de représenter les arêtes doubles :

On peut utiliser des lacs...



⑪ Le but est bien sûr d'éviter de faire le graphe très fastidieux...

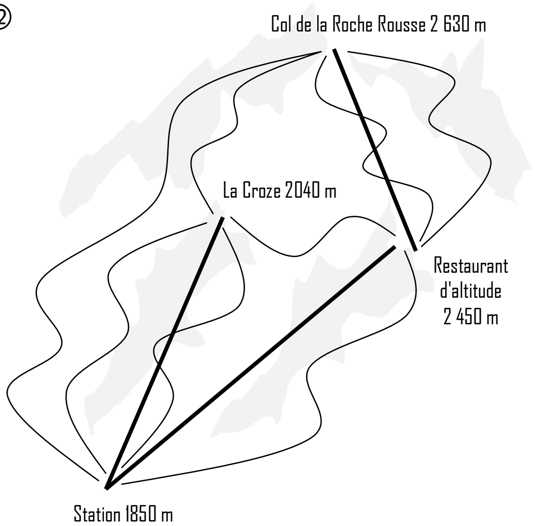
a. L'ordre de G est 20 car il y a 20 sommets.

b. G n'est pas complet car les sommets pairs ne sont pas reliés aux sommets impairs.

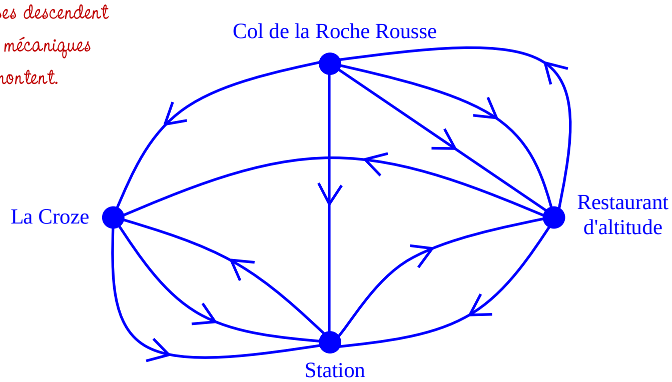
G n'est pas connexe car les nombres pairs ne sont reliés qu'à des nombres pairs et forment donc un sous-graphe non relié au sous-graphe des nombres impairs.

c. Il y a 10 sommets pairs et 10 sommets impairs.
Chaque sommet pair est relié aux 9 autres sommets pairs et est donc de degré 9.
De même, chaque sommet impair est relié aux 9 autres sommets impairs et est donc de degré 9.
La somme des degrés est donc $10\times9 + 10\times9 = 180$.
Donc le nombre d'arêtes est $\frac{180}{2} = 90$.

⑫



Les pistes sinueuses descendent et les remontées mécaniques rectilignes montent.

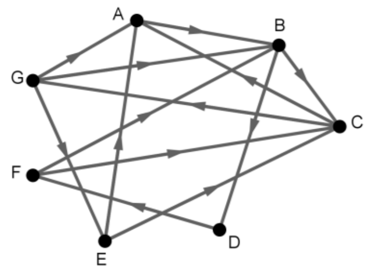


Attention au sens de la piste entre La Croze et le restaurant d'altitude, il est donné par les altitudes.

⑬ **a.**

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés entrants	3	3	3	1	1	1	1
Degrés sortants	1	2	2	1	2	2	3

La somme des degrés entrants est $3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$.
La somme des degrés sortants est $1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3 = 13$.



b. La somme totale des degrés est $13 + 13 = 26$,
donc le nombre d'arcs est $\frac{26}{2} = 13$.