

Correction de T^{ale} S - PROBABILITÉS - Fiche 2

1. 1.1. La probabilité que l'appareil fonctionne moins de 200 jours est :

$$\begin{aligned}
 P(T < 200) &= \int_0^{200} 0,005 e^{-0,005x} \cdot dx && \rightarrow \text{Vous pouvez passer directement à } 1 - e^{-0,005 \times 200}, \text{ mais c'est bien de montrer sa culture...} \\
 &= [-e^{-0,005x}]_0^{200} \\
 &= 1 - e^{-0,005 \times 200} \\
 &\approx 0,632, \text{ arrondi à } 10^{-3}
 \end{aligned}$$

- 1.2. La durée de vie moyenne d'une telle ampoule est l'espérance :

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{\lambda} \\
 &= \frac{1}{42 \times 10^{-5}} \\
 &\approx 2\,381
 \end{aligned}$$

Donc, la durée de vie moyenne d'une telle ampoule est 2 381 jours.

→ N'oubliez pas l'unité.

- 1.3. La probabilité qu'un usager occupe un guichet entre 10 et 20 minutes est :

$$\begin{aligned}
 \int_{10}^{20} 0,12 e^{-0,12x} \cdot dx &= [-e^{-0,12x}]_{10}^{20} && \rightarrow \text{Pas de variable aléatoire pour noter la probabilité de manière pratique.} \\
 &= e^{-0,12 \times 10} - e^{-0,12 \times 20} \\
 &\approx 0,210, \text{ arrondi à } 10^{-3}
 \end{aligned}$$

- 1.4. $P(X \leq 1,5) = 0,65$

→ On va traduire la probabilité connue...

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda \times 1,5} = 0,65$$

→ ... en une équation d'inconnue λ .

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda \times 1,5} = 0,35$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-\lambda \times 1,5}) = \ln 0,35$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \times 1,5 = \ln 0,35$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,35}{-1,5}$$

→ Pas d'inquiétude avec les $-$: si λ doit être positif, on a $\ln 0,35$ qui est aussi négatif.

$$\Leftrightarrow \lambda \approx 0,70, \text{ arrondi à } 10^{-2}$$

- 1.5. 1^{ère} méthode : utiliser la durée de vie sans vieillissement est ici le plus naturel, car on donne la durée passée (250 h) et la durée à venir (100 h).

La probabilité que ce composant dure encore 100 heures, sachant qu'il dure depuis déjà 250 heures, est :

$$\begin{aligned}
 P_{(X \geq 250)}(X \geq 250 + 100) &= P(X \geq 100) \text{ car c'est une loi à durée de vie sans vieillissement} \\
 &= e^{-0,03 \times 100} \\
 &\approx 0,050, \text{ arrondi à } 10^{-3}
 \end{aligned}$$

2^{ème} méthode : utiliser la formule des probabilités conditionnelles

La probabilité que ce composant dure encore 100 heures, sachant qu'il dure depuis déjà 250 heures, est :

$$\begin{aligned}
 P_{(X \geq 250)}(X \geq 250 + 100) &= \frac{P((X \geq 250) \cap (X \geq 350))}{P(X \geq 250)} \\
 &= \frac{P(X \geq 350)}{P(X \geq 250)} \\
 &= \frac{e^{-0,03 \times 350}}{e^{-0,03 \times 250}} \\
 &\approx 0,050, \text{ arrondi à } 10^{-3}
 \end{aligned}$$

- 1.6. La probabilité que ce moteur ne subisse aucune panne durant les 24 premiers mois est :

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 24) &= 1 - P(X < 24) \\
 &= 1 - \int_0^{24} 0,015 e^{-0,015x} \cdot dx \\
 &= 1 - [-e^{-0,015x}]_0^{24} \\
 &= e^{-0,015 \times 24} \\
 &\approx 0,698, \text{ arrondi à } 10^{-3}
 \end{aligned}$$

- 1.7. Le temps d'attente est en moyenne de 2 minutes 30

donc l'espérance est $E = 2,5$

$$\text{donc } \lambda = \frac{1}{E} = \frac{1}{2,5} = 0,4 .$$

- 1.8. 1^{ère} méthode : avec la durée de vie sans vieillissement

La probabilité qu'un tel atome se désintègre avant 10 000 ans, sachant qu'il n'a pas été désintégré durant ses 4 000 premières années, est :

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 4\,000)}(X < 10\,000) &= 1 - P_{(X \geq 4\,000)}(X \geq 10\,000) && \rightarrow \text{Je passe à l'événement contraire pour avoir } \geq \text{ dans le bon sens.} \\ &= 1 - P_{(X \geq 4\,000)}(X \geq 4\,000 + 6\,000) && \rightarrow \text{Je décompose la durée totale en (durée passée + durée à venir).} \\ &= 1 - P(X \geq 6\,000) \text{ car c'est une loi à durée de vie sans vieillissement} \\ &= P(X < 6\,000) \\ &= 1 - e^{-0,0001210 \times 6000} \\ &\approx 0,516 \text{ , arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

2^{ème} méthode : utiliser la formule des probabilités conditionnelles

La probabilité qu'un tel atome se désintègre avant 10 000 ans, sachant qu'il n'a pas été désintégré durant ses 4 000 premières années, est :

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 4\,000)}(X < 10\,000) &= \frac{P((X \geq 4\,000) \cap (X < 10\,000))}{P(X \geq 4\,000)} \\ &= \frac{P(4\,000 \leq X < 10\,000)}{P(X \geq 4\,000)} \\ &= \frac{e^{-0,0001210 \times 4000} - e^{-0,0001210 \times 10000}}{e^{-0,0001210 \times 4000}} \\ &\approx 0,516 \text{ , arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

2. 2.1. $P(X = 30)$ est nulle !

On calcule à la machine $P(X \leq 60) = 1 - e^{-0,02 \times 60} \approx 0,699$

On calcule à la machine $P(X \leq 30) = 1 - e^{-0,02 \times 30} \approx 0,451$

Réponse : $P(X \leq 30)$.

- 2.2. On calcule à la machine $P(T \geq 60) = e^{-\frac{\ln 2}{30} \times 60} = 0,25$.

On peut aussi le faire à la main : $P(T \geq 60) = e^{-\frac{\ln 2}{30} \times 60} = e^{-2 \times \ln 2} = e^{-\ln 2^2} = e^{-\ln 4} = e^{\ln \frac{1}{4}} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Réponse : **b.** 0,25

- 2.3. On calcule à la machine $P(X \geq 6) = e^{-\frac{1}{8} \times 6} \approx 0,472$

Réponse : **c.**

- 2.4. ♦ La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes est :

$$\begin{aligned} P(T \geq 5) &= 1 - P(T < 5) \\ &= 1 - \int_0^5 0,7 e^{-0,7x} \cdot dx \\ &= 1 - [-e^{-0,7x}]_0^5 \\ &= e^{-0,7 \times 5} \\ &\approx 0,030 \text{ , arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

Donc, l'affirmation n°1 est fausse.

- ♦ Le temps d'attente moyen à ce guichet est l'espérance :

$$E = \frac{1}{0,7} \approx 1,4$$

Le temps d'attente moyen est d'environ 1 minute 24 secondes.

Donc, l'affirmation n°2 est fausse.

3. a) $P(D \leq 4) = 0,5$ signifie que la probabilité que la peluche subisse un dommage majeur durant les quatre années qui suivent son achat est de 0,5.

Ou encore : $P(D \leq 4) = 0,5$ signifie qu'il y a une chance sur deux que la peluche subisse un dommage majeur durant les quatre années qui suivent son achat.

Pour la suite, c'est comme dans le 1.4. :

$$\begin{aligned} P(D \leq 4) &= 0,5 && \rightarrow \text{On va traduire la probabilité connue...} \\ \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda \times 4} &= 0,5 && \rightarrow \dots \text{ en une équation d'inconnue } \lambda. \\ \Leftrightarrow e^{-4\lambda} &= 0,5 \\ \Leftrightarrow \ln(e^{-4\lambda}) &= \ln 0,5 \\ \Leftrightarrow -4\lambda &= \ln 0,5 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{\ln 0,5}{-4} && \rightarrow \text{C'est une valeur exacte...} \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{\ln \frac{1}{2}}{-4} = \frac{-\ln 2}{-4} = \frac{\ln 2}{4} && \rightarrow \dots \text{ qu'on peut un peu arranger.} \end{aligned}$$

- b) Comme dans le 1.5. :

1^{ère} méthode : utiliser la durée de vie sans vieillissement est ici le plus naturel, car on donne la durée passée (3 ans) et la durée à venir (5 ans).

La probabilité que la peluche ne subisse pas de dommage majeur pendant 5 ans supplémentaires, sachant qu'elle n'en a pas subi pendant 3 ans est :

$$\begin{aligned} P_{(D \geq 3)}(D \geq 3 + 5) &= P(D \geq 5) \text{ car c'est une loi à durée de vie sans vieillissement} \\ &= e^{-0,1733 \times 5} \\ &\approx 0,4204, \text{ arrondi au dix-millième} \end{aligned}$$

2^{ème} méthode : utiliser la formule des probabilités conditionnelles

La probabilité que la peluche ne subisse pas de dommage majeur pendant 5 ans, sachant qu'elle n'en a pas subi pendant 3 ans est :

$$\begin{aligned} P_{(D \geq 3)}(D \geq 3 + 5) &= \frac{P((D \geq 3) \cap (D \geq 8))}{P(D \geq 3)} \\ &= \frac{P(D \geq 8)}{P(D \geq 3)} \\ &= \frac{e^{-0,1733 \times 8}}{e^{-0,1733 \times 3}} \\ &\approx 0,4204, \text{ arrondi au dix-millième} \end{aligned}$$

4. a) Comme dans le 1.4. :

$$\begin{aligned} P(0 \leq T \leq 24) &= 0,03 && \rightarrow \text{Remarque que } P(0 \leq T \leq 24), \text{ c'est pareil que } P(T \leq 24) \dots \\ \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda \times 24} &= 0,03 \\ \Leftrightarrow e^{-24\lambda} &= 0,97 \\ \Leftrightarrow \ln(e^{-24\lambda}) &= \ln 0,97 \\ \Leftrightarrow -24\lambda &= \ln 0,97 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{\ln 0,97}{-24} && \rightarrow \text{C'est une valeur exacte... qu'on peut difficilement arranger.} \end{aligned}$$

Mais on vérifie que cette valeur exacte est bien conforme à la valeur offerte dans l'énoncé... juste en-dessous : $\frac{\ln 0,97}{-24} \approx 0,001269\dots$

- b) Comme dans le 1.3. :

$$\begin{aligned} P(24 \leq T \leq 48) &= \int_{24}^{48} 0,00127 e^{-0,00127x} \cdot dx \\ &= [-e^{-0,00127x}]_{24}^{48} \\ &= e^{-0,00127 \times 24} - e^{-0,00127 \times 48} \\ &\approx 0,0291, \text{ arrondi à } 10^{-4} \end{aligned}$$

- c) 1) C'est la formule que nous utilisons régulièrement depuis le début de cette fiche.
Il faut la démontrer, comme ça a été fait en cours avec un paramètre λ quelconque.
Il suffit de refaire la démonstration avec 0,00127 à la place de λ :

$$\begin{aligned} P_{T \geq t}(T \geq t + h) &= \frac{P((T \geq t) \cap (T \geq t + h))}{P(T \geq t)} && \rightarrow \text{On se sert nécessairement de l'autre méthode, celle de la probabilité conditionnelle.} \\ &= \frac{P(T \geq t + h)}{P(T \geq t)} \text{ car } h > 0 \\ &= \frac{e^{-0,00127(t+h)}}{e^{-0,00127t}} \\ &= \frac{e^{-0,00127t} \times e^{-0,00127h}}{e^{-0,00127t}} && \rightarrow \text{J'utilise } e^{a+b} = e^a e^b. \\ &= e^{-0,00127h} && \rightarrow \text{Je simplifie.} \\ &= P(T \geq h) \end{aligned}$$

- 2) C'est comme dans le 1.5. , mais la question précédente suggère d'utiliser la durée de vie sans vieillissement.

La probabilité que le module fonctionne encore les 12 mois suivants, sachant qu'il fonctionne depuis 36 mois est :

$$\begin{aligned} P_{(T \geq 36)}(T \geq 36 + 12) &= P(T \geq 12) \text{ d'après la question précédente} \\ &= e^{-0,00127 \times 12} \\ &\approx 0,9849, \text{ arrondi à } 10^{-4} \end{aligned}$$

5. a) 1) f étant une fonction positive sur $[0; +\infty[$, $P(T \leq a) = \int_0^a f(x) \cdot dx$ est l'aire comprise entre les droites $x = 0$ et $x = a$, la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.

N'oubliez pas qu'une intégrale est une aire à condition que la fonction intégrée soit positive...

- 2) Pour tout réel $t > 0$:

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \cdot dx \\ &= [-e^{-\lambda x}]_0^t \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad \rightarrow \text{Connaissez cette primitive par cœur !}$$

- 3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(T \leq t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda t})$

Or :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} (-\lambda t) = -\infty \text{ car } \lambda > 0 \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases} \quad \text{donc, par composition, } \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-\lambda t}) = 0$$

donc, par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda t}) = 1$.

- b) Comme dans le 1.4. :

$$P(T \leq 7) = 0,5$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda \times 7} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow e^{-7\lambda} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-7\lambda}) = \ln 0,5$$

$$\Leftrightarrow -7\lambda = \ln 0,5$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,5}{-7}$$

Donc : $\lambda \approx 0,099$ $\rightarrow$ On jette un œil dans l'énoncé... la valeur est donnée !

- c) 1) Comme dans le 1.6. :

La probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est :

$$\begin{aligned} P(T \geq 5) &= 1 - P(T < 5) \\ &= 1 - \int_0^5 0,099 e^{-0,099x} \cdot dx \\ &= 1 - [-e^{-0,099x}]_0^5 \\ &= e^{-0,099 \times 5} \\ &\approx 0,610, \text{ arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

- 2) Même situation que le 1.5. .

Puisque la différence entre 7 et 2 est 5 et qu'on vient de calculer $P(T \geq 5)$, on utilise la durée de vie sans vieillissement :

La probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans, sachant qu'il fonctionne encore au bout de 2 ans est :

$$\begin{aligned} P_{(T \geq 2)}(T \geq 7) &= P_{(T \geq 2)}(T \geq 2 + 5) \\ &= P(T \geq 5) \text{ car c'est une loi à durée de vie sans vieillissement} \\ &\approx 0,610, \text{ arrondi à } 10^{-3}, \text{ d'après la question précédente} \end{aligned}$$

- 3) L'espérance mathématique $E(T)$ vaut $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,099} \approx 10$.

Cela signifie que ces composants ont une durée de vie moyenne de 10 ans.